Die Regelflächen, die durch Biegung aus den Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung hervorgehen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der Hohen Philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Rudolf Nelkenbrecher

aus **Zeitz** (Prov. Sachsen).

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Halle (Saale)
Buchdruckerei Hohmann
1916.

Referent: Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. A. Gutzmer.

Meinen lieben Eltern!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546024_0038

Inhaltsübersicht.

Bezeichnungen.

Einleitung.

I. Die Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung und ihre Biegungsregelflächen.

§ 1. Die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung.

§ 2. Die Biegungsregelflächen der Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung — eine Flächenklasse.

§ 3. Weitere Untersuchung der betrachteten Flächenklasse.

§ 4. Unter welchen Bedingungen ist eine vorgegebene windschiefe Regelfläche auf die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung abwickelbar?

II. Besondere Biegungen.

A. Die Regelfläche mit Richtebene.

§ 1. Eigenschaften dieser Regelfläche.

§ 2. Bestimmung der Gleichungen der Kurven $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$.

§ 3. Wann ist die Biegungskurve der Kurve konstanter Krümmung wieder eine Kurve konstanter Krümmung?

B. Einige weitere besondere Regelflächen.

§ 1. Biegung der Hauptnormalenfläche auf die Hauptnormalenfläche einer Orthogonaltrajektorie ihrer Erzeugenden.

§ 2. Biegung der Hauptnormalenfläche derart, daß die Kurve konstanter Krümmung eben wird.

§ 3. Biegung der Hauptnormalenfläche in eine Regelfläche mit ebener Striktion.

III. Die Regelflächen mit geodätischer Striktion.

§ 1. Die Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung mit geodätischer Striktionslinie.

§ 2. Biegung dieser Hauptnormalenflächen in die Regelfläche mit Richtebene.

§ 3. Weitere Biegungsflächen dieser Hauptnormalenflächen.

§ 4. Die Regelflächen mit orthogonaler Striktion.

Anhang.

Bezeichnungen.

α, β, γ Richtungskos. der Tangente,

l, m, n „ „ Hauptnormalen,

λ, μ, ν „ „ Binormalen,

$\varrho = \frac{ds}{d\tau}$ Krümmungsradius,

$r = \frac{ds}{d\sigma}$ Torsionsradius,

$\mathfrak{r} = \frac{ds}{dk}$ Radius der ganzen Krümmung,

(x_1, y_1, z_1) Punkt der gegebenen Kurve (M_1) konstanter Krümmung,

(x_2, y_2, z_2) Punkt der Zugeordneten (M_2),

(x^*, y^*, z^*) Punkt der Striktionslinie (E) der gemeinsamen Hauptnormalenfläche von (M_1) und (M_2),

$(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ Punkt der Biegungskurve $(\bar{M}_1)$ von (M_1),

$(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ „ „ „ $(\bar{M}_2)$ „ (M_2),

$(\bar{x}^*, \bar{y}^*, \bar{z}^*)$ „ „ „ $(\bar{E})$ „ (E).

Einleitung.

Die Biegungstheorie der Regelflächen hat durch die klassischen Arbeiten von Beltrami[1]) in gewisser Weise einen Abschluß gefunden. In neuerer Zeit ist aber durch die Hereinziehung der Kurventheorie durch Herrn Prof. Dr. E. Salkowski[2])[3]) der Theorie eine neue Seite abgewonnen worden, indem dieser insbesondere seine Aufmerksamkeit auf den Zusammenhang der Biegungstheorie mit der Theorie der Kurvenpaare richtete.

Es bilden zwei Kurven ein Kurvenpaar, falls sie durch Normaltransformation[4]) einander zugeordnet sind, d. h. falls jeder Punkt der einen Kurve in der Normalebene des entsprechenden Punktes der anderen liegt.[5]) Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der beiden Kurven, d. s. die Schnittgeraden der Normalebenen in entsprechenden Punkten, erzeugen eine windschiefe Regelfläche: die zu dem Kurvenpaare gehörige Regelfläche. Die Kurven eines Paares sind notwendig Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden ihrer Regelfläche. Entsprechende Punkte haben konstanten Abstand von einander. Umgekehrt: Sind zwei Kurven Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer windschiefen Regelfläche, so haben entsprechende Punkte denselben Abstand von einander, und die Kurven bilden ein Kurvenpaar.

---

[1]) Beltrami, Sulla flessione delle superficie rigate. Annali di Mat. 7, 105—138. 1865. Werke Bd. 1, 208—243.

[2]) E. Salkowski, Zum Biegungsproblem der Regelflächen. Deutsche Math.-Ver. 22, 1913.

[3]) E. Salkowski, Ueber Kurvenpaare im Raume. Deutsche Math.-Ver. 19, 1910.

[4]) A. Voß, Kurvenpaare im Raume. München. Ber. 1909.

[5]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 151.

Von Interesse sind folgende Kurvenpaare: Stehen die Bogenelemente der Kurven eines Paares längs des ganzen Verlaufs der beiden Kurven in konstantem Verhältnis zu einander, so nennt man das Kurvenpaar ein Kurvenpaar mit „proportionalen Bogenelementen“. Hat dieses konstante Verhältnis den Wert eins, dann spricht man von „isometrischen“ Kurvenpaaren. „Isogonale“ Kurvenpaare sind solche, deren Bogenelemente sich längs des ganzen Verlaufs der Kurven unter demselben Winkel kreuzen. Ist dieser ein rechter Winkel, so bilden die Kurven ein „orthogonales“ Kurvenpaar.

Fragt man nach isometrischen Kurvenpaaren, so kommt man auf die Binormalenflächen der Kurven konstanter Torsion, und es zeigt sich, daß diese Binormalenflächen eine große Anzahl gemeinsamer Eigenschaften besitzen und so eine besondere Klasse von windschiefen Regelflächen bilden. Dagegen führt die Frage nach dem allgemeinsten orthogonalen Kurvenpaare auf die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung, denn es gilt der Satz: Die Regelflächen, die durch Biegung aus den Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung hervorgehen, sind die Träger eines orthogonalen Kurvenpaares.

Mit diesen Biegungsregelflächen der Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Sie soll darlegen, daß den genannten Flächen eine große Anzahl ausgezeichneter und bemerkenswerter Eigenschaften zukommen, daß man es in ihnen mit einer besonderen Klasse von Regelflächen zu tun hat.

Im ersten Teile lernt man die Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung und ihre Biegungsregelflächen als Flächenklasse kennen, wobei die orthogonalen Kurvenpaare im Zusammenhang mit den Kurven der Mittelpunkte der Oskulationskugeln zweiter Ordnung und die zyklifizierenden Flächen von einem konstanten, vorgegebenen Radius eine hervorragende Bedeutung gewinnen. Sodann werden die Bedingungen untersucht, unter denen eine Linienfläche auf die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung abwickelbar ist. Man gelangt dabei zu einer Gleichung, die in gewisser Hinsicht als grundlegend für das vorliegende Problem bezeichnet werden kann.

Bei der Aufgabe, die Gleichungen der Biegungsregelflächen aufzustellen, kommt es wesentlich darauf an, die natürlichen Bestim-

mungsstücke einer der Biegungskurven der in Betracht zu ziehenden Kurven durch die der gegebenen Kurve auszudrücken. Da dies allgemein nicht durchführbar ist, wird man sich damit begnügen müssen, gewisse spezielle Biegungen vorzunehmen und für diese das gesteckte Ziel zu erreichen suchen. Hiermit befaßt sich der zweite Teil. Bei dieser Gelegenheit werden diese aus der Flächenklasse herausgegriffenen Regelflächen, die auch um ihrer selbst willen interessieren, einer eingehenderen Untersuchung unterzogen.

Im dritten Teile ist die Aufgabe noch spezieller gefaßt. Es handelt sich dort im wesentlichen um die Anwendung der gefundenen Gesetze auf bestimmte Kurven konstanter Krümmung:

erstens auf die Kurven der konstanten Krümmung $\frac{1}{\varrho} = 1$ auf den Rotationsflächen zweiter Ordnung,

zweitens auf die gemeine Schraubenlinie. Die Hauptnormalenflächen dieser Kurven, sowie ihre Biegungsregelflächen, besitzen geodätische Striktion. Für die Regelfläche mit Richtebene, die durch Biegung aus den Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung auf den Rotationsflächen zweiter Ordnung entsteht, lassen sich alle nur überhaupt in Betracht kommenden Größen berechnen. Sehr eigenartig ist die Gestalt der ebenen Biegungskurve der Kurven konstanter Krümmung auf den Rotationsflächen zweiter Ordnung und der gemeinen Schraubenlinie.

I. Die Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung und ihre Biegungsregelflächen.

§ 1. Die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung.

Gegeben sei (M_1), eine Kurve konstanter Krümmung, durch ihre kartesischen Gleichungen

$$x_1 = x_1(s_1),\quad y_1 = y_1(s_1),\quad z_1 = z_1(s_1). \tag{1}$$

Die geradlinige Fläche, die die Hauptnormalen dieser Kurve bilden, besitzt dann die Gleichungen [1])

$$X = x_1 + t\,l_1,\quad Y = y_1 + t\,m_1,\quad Z = z_1 + t\,n_1. \tag{2}$$

Für das Linienelement [2]) dieser Regelfläche ergibt sich mithin

$$dS^2 = \left(1 - 2\frac{t}{\varrho_1} + \frac{t^2}{r_1^2}\right) ds_1^2 + dt^2. \tag{3}$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig davon, ob die vorgegebene Kurve eine Kurve konstanter Krümmung ist.

Die Hauptnormalenfläche jeder eigentlichen Raumkurve ist eine windschiefe Regelfläche, deren Erzeugenden sich unter dem Winkel dk der ganzen Krümmung der gegebenen Kurve kreuzen und die eine Schar von Parameterlinien bilden. Die Kurven $t = c$ sind die Orthogonaltrajektorien dieser Geraden, was ja für (M_1) selbst ohne weiteres klar ist, und stellen die andere Schar der Parameterlinien dar.

Sind für die Punkte einer Flächenkurve die Flächennormalen mit den Binormalen identisch, so ist die Kurve eine Asymptotenlinie der Fläche [3]). Es gilt mithin der Satz:

[1]) G. Scheffers, Theorie der Flächen. 1910. S. 273.
[2]) a. a. O. S. 10.
[3]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven 1914. S. 80.

Jede Raumkurve ist asymptotische Linie der windschiefen Regelfläche ihrer Hauptnormalen.[1])

Auf der Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung (M_1) ist nun der gegebenen Raumkurve zugeordnet der Ort (M_2) ihrer Krümmungsmittelpunkte, welcher mit der Polarkurve zusammenfällt.[2]) Tangente, Hauptnormale und Binormale eines beliebigen Punktes von (M_1) sind also parallel der Binormale, Hauptnormale und Tangente im entprechenden Punkte von (M_2). Da aber nun der einem beliebigen Punkte P von (M_1) zugeordnete Punkt Q der Kurve (M_2) auf der Hauptnormalen von P liegt, so müssen die Hauptnormalen dieser beiden Kurven in entsprechenden Punkten identisch sein. Man erkennt auch sofort, daß (M_1) umgekehrt der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die Kurve (M_2) ist. (M_2) ist mithin wieder eine Kurve konstanter Krümmung — eine Kurve derselben konstanten Krümmung.

„Jede der beiden Kurven (M_1) und (M_2) ist auf ihrer gemeinschaftlichen Hauptnormalenfläche der Ort der Mittelpunkte der konstanten Krümmung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2}$ für die andere.“[3])

Jede der beiden Kurven liegt ferner auf der Polarfläche der anderen. (M_1) und (M_2) bilden also ein Kurvenpaar auf ihrer gemeinschaftlichen Hauptnormalenfläche. Man bezeichnet die Kurven (M_1) und (M_2) als ein „Paar von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung.“[4]) Zugleich kreuzen sich die Bogenelemente der Kurven (M_1) und (M_2) überall unter rechtem Winkel. Darin hat man sofort eine charakteristische Eigenschaft eines Paares von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung:

Eine Kurve konstanter Krümmung bildet mit ihrer Zugeordneten auf der windschiefen Regelfläche ihrer gemeinschaftlichen Hauptnormalen ein orthogonales Kurvenpaar.[5])

Nun nennt man den Schnittpunkt der Krümmungsachse einer Flächenkurve mit der Berührungsebene der Fläche im entsprechenden Kurvenpunkte, d. i. hier der Schmiegungsebene der Kurve, den Mittel-

---

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 91.
[2]) a. a. O. S. 51.
[3]) a. a. O. S. 106.
[4]) a. a. O. S. 107.
[5]) a. a. O. S. 151.

punkt der geodätischen Krümmung.[1]) Er hat von drei aufeinanderfolgenden Punkten der Kurve dieselbe Entfernung. Man erkennt unmittelbar: Von den Kurven eines Paares von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung ist jede auf der Fläche ihrer gemeinsamen Hauptnormalen der Ort der Mittelpunkte der geodätischen Krümmung für die andere. Sie haben demnach dieselbe konstante geodätische Krümmung. Somit:

„Die Kurven eines Paares von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung sind ein Paar zugeordneter geodätischer Kreise auf ihrer gemeinschaftlichen Hauptnormalenfläche."[2])

Außer dem Orte der Krümmungsmittelpunkte gibt es auf der Hauptnormalenfläche einer beliebigen Raumkurve noch eine ausgezeichnete Kurve: die Striktionskurve (E) der Hauptnormalenfläche. Die Striktionskurve einer windschiefen Regelfläche ist die Kurve der Mittelpunkte ihrer Erzeugenden.[3]) Zwei aufeinanderfolgende Erzeugenden kreuzen sich und werden daher von einer und nur einer Geraden, dem Striktionsstrahl, beide zugleich senkrecht geschnitten.[4]) Der Fußpunkt des Striktionsstrahles einer Erzeugenden ist ihr Mittelpunkt E.

Den Punkten der Striktionslinie einer Hauptnormalenfläche kommen die Parameterwerte

$$t^* = \frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1} \tag{4}$$

zu.[5]) Die kartesischen Gleichungen von (E) sind also:

$$x^* = x_1 + \frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1} l_1, \quad y^* = y_1 + \frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1} m_1, \quad z^* = z_1 + \frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1} n_1. \tag{5}$$

(6) Aus diesem Parameterwert $t^* = \dfrac{\dfrac{1}{\varrho_1}}{\dfrac{1}{r_1^{\,2}} + \dfrac{1}{\varrho_1^{\,2}}}$ für einen beliebigen Punkt der Striktionslinie geht sofort hervor: Die Mittelpunkte der Hauptnormalen, d. s. die Punkte, in denen sich die Hauptnormalen einander am meisten nähern, liegen zwischen den Punkten der

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 151.
[2]) a. a. O. S. 152.
[3]) a. a. O. S. 75.
[4]) a. a. O. S. 74.
[5]) a. a. O. S. 95.

gegebenen Kurve (M_1) und ihren Krümmungsmittelpunkten C_1. „Die Striktionslinie liegt daher auf der Hauptnormalenfläche immer in dem Bereich zwischen diesen Kurven (M_1) und (C_1)."[1])

Bei Raumkurven konstanter Krümmung ist ϱ_1 konstant, aber im allgemeinen nicht auch t^*.

§ 2. Die Biegungsregelflächen der Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung — eine Flächenklasse.

Es soll jetzt eine beliebige Deformation der Hauptnormalenfläche einer Raumkurve konstanter Krümmung vorgenommen werden, bei der die Geraden der Fläche geradlinig bleiben. Nur solche Biegungen sollen betrachtet werden. Dann kann man sich die Verbiegung der windschiefen Regelfläche folgendermaßen veranschaulichen: Man denke sich die ganze Regelfläche aus lauter starren windschiefen Streifen zusammengesetzt, die von je zwei benachbarten Erzeugenden begrenzt sind.[2]) Eine Verbiegung der Fläche kann jetzt nur so vor sich gehen, daß sich die starren Streifen um die begrenzenden Erzeugenden gegeneinander drehen. Es ist klar, daß bei diesen Biegungen der Winkel, unter dem sich zwei aufeinanderfolgende Erzeugenden kreuzen, und der kürzeste Abstand zweier Erzeugenden erhalten bleiben. Ebenso ist klar, daß, falls man sich auf der Regelfläche mehrere Kurven gezogen denkt, die Winkel, unter denen diese Kurven die Ezeugenden schneiden und unter denen sie sich gegenseitig kreuzen, ungeändert bleiben müssen, daß also insbesondere Orthogonaltrajektorien wieder in Orthogonaltrajektorien übergehen.

Eine Raumkurve ist eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden und zugleich Asymptotenlinie ihrer Hauptnormalenfläche. Die Biegungskurve der gegebenen Raumkurve bei einer beliebigen Deformation der Hauptnormalenfläche ist eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden der Biegungsregelfläche. Oder umgekehrt: Irgend eine Biegungsregelfläche der Hauptnormalenfläche einer Raumkurve ist eine Normalenfläche der Biegungskurve der gegebenen Kurve, aber diese ist im allgemeinen keine Asymptotenkurve auf der Biegungsregelfläche.

Die kartesischen Gleichungen dieser Biegungskurve $(\overline{M_1})$ seien

$$\overline{x_1} = x_1(s_1), \quad \overline{y_1} = \overline{y_1}(s_1), \quad z_1 = \overline{z_1}(s_1). \tag{7}$$

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 98—99

[2]) a. a. O. S. 88.

Die Erzeugenden der Biegungsregelfläche liegen in der Normalebene der Biegungskurve. Führt man den Winkel ω_1 ein, den die Erzeugenden der Biegungsregelfläche mit den Hauptnormalen der Biegungskurve in entsprechenden Punkten bilden, dann lauten die Gleichungen der Biegungsregelfläche:

$$(8)\quad \bar{X} = \bar{x_1} + t\cdot(\bar{l_1}\cos\omega_1 + \bar{\lambda_1}\sin\omega_1),\quad \bar{Y} = \bar{y_1} + t\cdot(\bar{m_1}\cos\omega_1 + \bar{\mu_1}\sin\omega_1),$$
$$\bar{Z} = \bar{z_1} + t\cdot(\bar{n_1}\cos\omega_1 + \bar{\nu_1}\sin\omega_1).^{1})$$

Berechnet man die Fundamentalgrößen erster Ordnung dieser Fläche:

$$(9)\quad \bar{E} = 1 - 2t\frac{\cos\omega_1}{\bar{\varrho_1}} + t^2\left[\left(\frac{1}{\bar{r_1}} - \omega_1'\right)^2 + \frac{\cos^2\omega_1}{\bar{\varrho_1}^2}\right]^{2}),\quad \bar{F} = 0,\quad \bar{G} = 1,$$

so ergibt sich für das Linienelement der Biegungsregelfläche:

$$(10)\quad d\bar{S}^2 = \left\{1 - 2t\frac{\cos\omega_1}{\bar{\varrho_1}} + t^2\left[\left(\frac{1}{\bar{r_1}} - \omega_1'\right)^2 + \frac{\cos^2\omega_1}{\bar{\varrho_1}^2}\right]\right\} ds_1^2 + dt^2.$$

Eine beliebige Verbiegung läßt nun das Linienelement einer Fläche ungeändert.[3]) Aus

$$(11)\qquad d\bar{S}^2 = dS^2$$

geht aber hervor: einmal

$$(1a)\qquad \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\bar{\varrho_1}}\cos\omega_1 \quad \text{oder} \quad \cos\omega_1 = \frac{\bar{\varrho_1}}{\varrho_1}.^{1})$$

Verbiegt man die Hauptnormalenfläche einer beliebigen Raumkurve in irgend einer Weise, so ist der Cosinus des Winkels ω_1, den die Erzeugenden der Biegungsregelfläche mit den Hauptnormalen der Biegungskurve bilden, gleich dem Quotienten der Krümmungen der gegebenen Kurve und ihrer Biegungskurve.

Da der Cosinus des Winkels ω_1 niemals größer als eins ist, so folgt

$$(12)\qquad \bar{\varrho_1} \leqq \varrho_1 .$$

Der Krümmungsradius der Biegungskurve ist niemals größer als der der gegebenen Raumkurve für den ganzen Verlauf beider Kurven.

Oder: Die Krümmung der Biegungskurve ist nie kleiner als die der gegebenen Kurve.

---

[1]) E. Salkowski, Ueber Kurvenpaare im Raume. Deutsche Math.-Ver. 1910. S. 239 u. f.

[2]) $\omega_1' = \frac{d\omega_1}{ds_1}$.

[3]) G. Scheffers, Theorie der Flächen. 1910. S. 17.

Ferner hat man aus (11)

$$\text{(IIa)} \qquad \left(\frac{1}{r_1} - \omega_1'\right)^2 + \frac{\cos^2 \omega_1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{r_1^2} \qquad \text{oder} \qquad d\bar{\sigma}_1 - d\omega_1 = d\sigma_1;^1)$$

d. h. *Die Torsionswinkel der gegebenen Raumkurve und ihrer Biegungskurve unterscheiden sich um die Aenderung des Winkels* ω_1.

Diese Beziehungen gelten immer für irgend zwei Kurven (M) und $(\bar{M})$, von denen (M) bei einer gewissen Deformation ihrer Hauptnormalenfläche in $(\bar{M})$ verbogen wird. Umgekehrt: Hängen die natürlichen Bestimmungsstücke zweier Raumkurven (M) und $(\bar{M})$ in obiger Weise zusammen, so ist (M) in $(\bar{M})$ verbiegbar, falls man ihre Hauptnormalenfläche passend deformiert.

Für die Folge beschäftigt uns nur der Fall, daß ϱ konstant ist, und für diesen geben die Gleichungen (Ia) und (IIa) den Zusammenhang zwischen den natürlichen Bestimmungsstücken einer gegebenen Kurve konstanter Krümmung (M_1) und ihrer Biegungskurve $(\bar{M}_1)$ bei einer beliebigen Deformation der Hauptnormalenfläche der ersteren.

Nennt man den Winkel, den die Hauptnormalen der Biegungskurve der Zugeordneten (M_2) mit den Erzeugenden der Biegungsregelfläche einschließen, ω_2, dann gelten analog die Gleichungen

$$\text{(Ib)} \qquad \cos \omega_2 = \frac{\bar{\varrho}_2}{\varrho_1} \qquad \text{und} \qquad \text{(IIb)} \qquad d\bar{\sigma}_2 - d\omega_2 = d\sigma_2,$$

welche den Zusammenhang zwischen den natürlichen Konstanten von (M_2) und ihrer Biegungskurve $(\bar{M}_2)$ darstellen.

§ 3. Weitere Untersuchung der betrachteten Flächenklasse.

a) Das allgemeinste orthogonale Kurvenpaar.

Die Biegungskurven eines Paares von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung sind wieder Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden der Biegungsfläche, oder: die Biegungsregelfläche ist eine gemeinsame Normalenfläche der beiden Biegungskurven. Ferner bleibt auch der rechte Winkel erhalten, unter dem sich die Kurven in entsprechenden Punkten kreuzen. Die Normalebene der einen Biegungskurve enthält also das Bogenelement der anderen, und die Schnittgeraden entsprechender Normalebenen sind die Erzeugenden

---

[1]) E. Salkowski, Ueber Kurvenpaare im Raume. Deutsche Math.-Ver. 1910. S. 239 u. f.

der Biegungsregelfläche. Die Kurven $(\overline{M_1})$ und $(\overline{M_2})$ haben somit alle Eigenschaften, die ein orthogonales Kurvenpaar kennzeichnen.

Da bei jeder Biegung auch die geodätische Krümmung einer Flächenkurve ungeändert bleibt[1]), so geht ein geodätischer Kreis wieder in einen geodätischen Kreis über. Die Biegungskurven der Kurven eines Paares von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung bilden wieder ein Paar von zugeordneten geodätischen Kreisen auf der Biegungsregelfläche. Das heißt: Jede der beiden Biegungskurven ist ein geodätischer Kreis auf der Biegungsregelfläche, und die Mittelpunktskurve der einen ist die andere Biegungskurve.

Hat man nun umgekehrt auf einer beliebigen windschiefen Regelfläche ein Paar von zugeordneten geodätischen Kreisen, so kann man die Fläche immer derart verbiegen, daß die Biegungsregelfläche die Hauptnormalenfläche einer der beiden Biegungskurven wird. Man kann ja, da jede windschiefe Regelfläche eine Normalenfläche jeder der Orthogonaltrajektorien ihrer Erzeugenden ist, jede Regelfläche auf die Hauptnormalenfläche einer beliebigen Orthogonaltrajektorie ihrer Erzeugenden verbiegen.[2]) Die Biegungskurven der Kurven des Paares der zugeordneten geodätischen Kreise bilden, da bei jeder Verbiegung die Winkel in entsprechenden Punkten erhalten bleiben, ein orthogonales Kurvenpaar. Jeder Punkt der einen Kurve liegt in der Normalebene des entsprechenden der anderen. Die Tangenten in entsprechenden Punkten, welche auf der Erzeugenden der Biegungsregelfläche senkrecht stehen, kreuzen sich also unter rechtem Winkel. Nun sind aber für diese Biegung die Erzeugenden der Biegungsregelfläche die Hauptnormalen einer der beiden Biegungskurven. Die Tangenten der beiden Biegungskurven kreuzen sich mithin rechtwinklig und stehen auf den Hauptnormalen einer der beiden Biegungskurven senkrecht. Somit sind die Binormalen der einen Biegungskurve parallel den Tangenten in den entsprechenden Punkten der anderen, und die Hauptnormalen der beiden Kurven in entsprechenden Punkten sind parallel. Nun liegen aber entsprechende Punkte der beiden Biegungskurven auf der Hauptnormalen der einen Kurve. Die Hauptnormalen der beiden Biegungskurven fallen also zusammen. Falls aber zwei Kurven ein orthogonales Kurvenpaar auf ihrer gemeinsamen Hauptnormalen-

---

[1]) G. Scheffers, Theorie der Flächen. 1913. S. 549.
[2]) Bianchi, Vorles. über Diff.-Geom. 1899. S. 228.

fläche bilden, so folgt aus der Theorie der Bertrandschen [1]) Kurven, daß diese beiden Kurven ein Paar von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung bilden. Damit ist aber eine charakteristische Eigenschaft der vorliegenden Klasse von Regelflächen festgestellt:

„Die Biegungsregelflächen der Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung sind die einzigen, auf denen ein orthogonales Kurvenpaar existiert, d. h. ein geodätischer Kreis, dessen Mittelpunktskurve auch auf der Regelfläche liegt.“ [2]) [3])

Eng verknüpft mit den orthogonalen Kurvenpaaren sind die Kurvenpaare mit proportionalen Bogenelementen:

„Die Kurvenpaare mit proportionalen Bogenelementen liegen auf den Regelflächen, die ein orthogonales Kurvenpaar enthalten. Sie schneiden mit diesem sogenannten Mittelpaar aus allen Erzeugenden vier harmonische Punkte aus.“ [4])

Für die vorliegende Flächenklasse läßt sich hiermit ein neuer Satz aussprechen:

Die Biegungsregelflächen der Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung sind die Regelflächen, auf denen die Kurvenpaare mit proportionalen Bogenelementen liegen.

b) Kurven der Oskulationskugelmittelpunkte von einem gegebenen Radius, zyklifizierende Flächen:

Aus der Tatsache, daß die Biegungskurven von (M_1) und (M_2) ein Kurvenpaar bilden, folgt unmittelbar, daß jede der beiden Biegungskurven auf der Polarfläche, d. i. Fläche der Krümmungsachsen, der anderen liegt.[5]) Jeder Punkt der Krümmungsachse einer Raumkurve ist von drei aufeinanderfolgenden Kurvenpunkten gleich weit entfernt. Die Entfernung eines beliebigen Punktes der einen Biegungskurve von dem entsprechenden der anderen ist nun gleich ϱ, dem konstanten Krümmungsradius der vorgegebenen Raumkurve. Um jeden Punkt der einen Biegungskurve kann man also mit dem Radius ϱ eine Kugel legen, welche die andere Biegungskurve in der zweiten Ordnung berührt. Mithin:

---

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 120 u. f.

[2]) a. a. O. S. 155.

[3]) Bei der Ableitung dieses Satzes habe ich mich ziemlich eng an die Ausführungen a. a. O. S. 155 angeschlossen.

[4]) a. a. O. S. 160.

[5]) Diese Eigenschaft kann man auch sofort unter Berücksichtigung der Gleichungen (Ia) und (Ib) aussagen. Vgl. a. a. O. S. 147.

Jede der beiden Biegungskurven eines Paares von zugeordneten geodätischen Kreisen ist der Ort der Mittelpunkte der Oskulationskugeln vom konstanten Radius ϱ, dem konstanten Radius der Krümmung der gegebenen Raumkurve, für die andere.

Oder:

Von den Kurven eines beliebigen orthogonalen Kurvenpaares ist jede der Ort der Mittelpunkte der Oskulationskugeln für einen konstanten Radius ϱ der anderen. Dieser Radius ϱ ist der konstante Krümmungsradius der Biegungskurven des Paares, wenn man ihre Regelfläche auf die Hauptnormalenfläche einer der Biegungskurven verbiegt.[1])

Damit hat man wieder eine charakteristische Eigenschaft jener Klasse von Regelflächen aufgedeckt.

Man stelle sich jetzt die Aufgabe, die abwickelbaren Flächen zu bestimmen, die die Biegungskurven eines Paares von zugeordneten geodätischen Kreisen, d. i. die Kurven eines beliebigen orthogonalen Kurvenpaares, bei ihrer Abwicklung in die Ebene in einen Kreis vom Radius ϱ, dem Krümmungsradius der gegebenen Raumkurve konstanter Krümmung, überführen. Das heißt: Es sollen die „zyklifizierenden Flächen" für den Radius ϱ von $(\overline{M_1})$ und $(\overline{M_2})$ bestimmt werden.

Um diese abwickelbaren Flächen zu ermitteln, hat man zunächst ihre einhüllenden Ebenen zu suchen: die zyklifizierenden Ebenen. Zwei aufeinanderfolgende zyklifizierende Ebenen schneiden sich in der zyklifizierenden Geraden, der Erzeugenden der zyklifizierenden Fläche.

Die zyklifizierende Ebene für den Radius ϱ einer Kurve ist die Ebene durch die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkte und den Punkt der entsprechenden Krümmungsachse, der von dem Kurvenpunkte den Abstand ϱ hat.[2]) Man sieht also: Die zyklifizierende Ebene irgend eines Punktes einer der beiden Biegungskurven eines Paares von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung ist bestimmt durch das Bogenelement der Kurve und den entsprechenden Punkt der anderen Biegungskurve, oder ist bestimmt durch die Tangente der Kurve und die entsprechende Erzeugende

---

[1]) Diese Biegungsregelfläche ist die gemeinschaftliche Hauptnormalenfläche der beiden Biegungskurven; vgl. § 3 a.

[2]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 146.

der Biegungsregelfläche. Diese Ebene ist aber die Normalebene der anderen Biegungskurve. Somit hat man gefunden:

Die „zyklifizierende Ebene für den Radius ϱ" einer der beiden Biegungskurven der Kurven eines Paares von zugeordneten geodätischen Kreisen ist einfach die Normalebene des entsprechenden Punktes der anderen. Oder:

Die Krümmungsachse in einem beliebigen Punkte der einen Biegungskurve ist die zyklifizierende Gerade für den Radius ϱ des entsprechenden Punktes der anderen Biegungskurve.

Daraus folgt der für obige Flächenklasse wichtige Satz:

Die Polarfläche jeder der Biegungskurven der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten ist die zyklifizierende Fläche vom Radius ϱ, dem konstanten Krümmungsradius der gegebenen Raumkurve, für die andere.

Die Kurven der Oskulationskugelmittelpunkte und die zyklifizierenden Flächen für einen gegebenen Radius erhalten also durch dieses Biegungsproblem eine bemerkenswerte Bedeutung.

c) Zusammenhang der Flächenklasse mit den Biegungsregelflächen der Binormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung:

Aus den Relationen (Ia) und (IIa) geht hervor:

Biegt man die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung derart, daß deren Biegungskurve wieder eine Kurve konstanter Krümmung ist, so bleibt die Torsion der Kurve ungeändert.[1])

Nun gilt der Satz:

Die Binormalenflächen aller Raumkurven, bei denen die Torsion dieselbe Funktion der Bogenlänge ist, sind aufeinander abwickelbar.[2])

Mithin ist die Biegung der Hauptnormalenfläche von (M_1) begleitet von der Biegung der Binormalenfläche derselben Kurve, so daß, falls man die Hauptnormalenfläche auf eine gewisse Regelfläche gebogen hat, die Biegungsregelfläche der Binormalenfläche stets die Binormalenfläche dieser Biegungskurve von (M_1) ist. Kurz gesagt:

Einer stetigen Biegung der Hauptnormalenfläche der Kurve (M_1)

---

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 156.

[2]) E. Salkowski, Biegungsproblem der Regelflächen. Deutsche Math.-Ver. 1913. S. 60 u. f.

entspricht eine stetige Biegung der Binormalenfläche dieser Kurve. Allgemein:

Eine stetige Biegung der Regelfläche eines orthogonalen Kurvenpaares zieht eine stetige Biegung der Binormalenfläche der einen Kurve des Paares nach sich, wenn die Biegung diese Kurve in eine Kurve konstanter Krümmung überführt.

Für die vorliegende Flächenklasse ist in diesen „miteinander gekoppelten“ [1]) Linienflächen eine neue charakteristische Eigenschaft gewonnen.

§ 4. Unter welchen Bedingungen ist eine vorgegebene windschiefe Regelfläche auf die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung abwickelbar?

Um diese Frage zu beantworten, muß man auf die charakteristischen Eigenschaften der vorliegenden Flächenklasse zurückgehen:

a) Man weiß: Die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung und ihre Biegungsregelflächen sind die einzigen windschiefen Regelflächen, die ein orthogonales Kurvenpaar enthalten.

Also kann man sofort folgendes sagen:

Eine vorgegebene windschiefe Regelfläche ist dann und nur dann auf die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung abwickelbar, wenn sie ein orthogonales Kurvenpaar trägt.

Eine windschiefe Regelfläche kann nun aufgefaßt werden als Normalenfläche jeder der Orthogonaltrajektorien ihrer Erzeugenden. Die gestellte Frage ist mithin äquivalent der folgenden:

Wie hat man die Normalen einer gegebenen Raumkurve auszuwählen, damit auf der dadurch bestimmten Regelfläche ein orthogonales Kurvenpaar existiert?

Sind $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer Raumkurve, und greift man aus den Normalen in jedem Punkt dieser Kurve die heraus, die mit der Hauptnormalen einen Winkel ω einschließt, so heißen die Gleichungen der damit definierten Regelfläche:

$$(13)\quad \overline{X} = \bar{x} + t\cdot(\bar{l}\cos\omega + \bar{\lambda}\cdot\sin\omega),\quad \overline{Y} = \bar{y} + t\cdot(\bar{m}\cdot\cos\omega + \bar{\mu}\cdot\sin\omega),$$
$$\overline{Z} = \bar{z} + t\cdot(\bar{n}\cdot\cos\omega + \bar{\nu}\cdot\sin\omega).$$

Zwei Kurven, die ein Kurvenpaar bilden sollen, müssen notwendig Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden ihrer Regelfläche

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 156.

sein. Man denke sich also auf jener Normalenfläche irgend zwei Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden gezogen:

(14) $$t_1 = const. \quad \text{und} \quad t_2 = Const.$$

Ihre kartesischen Gleichungen lauten:

(15) $$\bar{x}_1 = \bar{x} + t_1 (\bar{l} \cos\omega + \bar{\lambda} \sin\omega), \quad \bar{y}_1 = \bar{y} + t_1 (\bar{m} \cos\omega + \bar{\mu} \sin\omega),$$
$$\bar{z}_1 = \bar{z} + t_1 (\bar{n} \cos\omega + \bar{\nu} \sin\omega)$$

und

(16) $$\bar{x}_2 = x + t_2 (\bar{l} \cos\omega + \bar{\lambda} \sin\omega), \quad y_2 = \bar{y} + t_2 (m \cos\omega + \mu \sin\omega),$$
$$\bar{z}_2 = \bar{z} + t_2 (\bar{n} \cos\omega + \bar{\nu} \sin\omega).$$

Soll das durch diese beiden Kurven dargestellte Kurvenpaar ein orthogonales sein, so müssen sich entsprechende Bogenelemente rechtwinklig kreuzen. Die Forderung

(17) $$\Sigma\, d x_1 \cdot d x_2 = O$$

liefert aber die Bedingungsgleichung

(III.) $$1 - (t_1 + t_2) \frac{\cos\omega}{\varrho} + t_1 t_2 \left[\left(\frac{1}{r} - \omega' \right)^2 + \frac{\cos^2\omega}{\varrho^2} \right] = O.$$

Das heißt: Falls der Winkel ω dieser Gleichung genügt, dann und nur dann ist jene Normalenfläche auf die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung abwickelbar.

Man erkennt unmittelbar:

Gleichung (III) wird erfüllt von dem Wertepaar

$$t_1 = O; \; t_2 = \frac{\bar{\varrho}}{\cos\omega}.$$

D. h. die gegebene Raumkurve und die Schnittkurve der betrachteten Normalenfläche mit ihrer Polarfläche bilden ein orthogonales Kurvenpaar. Auf Grund der Sätze I. § 3 sieht man jetzt die Richtigkeit des Satzes ein:

Jede Raumkurve kann mit ∞^1 geodätischen Kreisen ihrer Polarfläche zu einem orthogonalen Kurvenpaare gepaart werden.

b) Die Biegungskurven der Kurven eines Paares von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung besitzen ferner die Eigenschaft, zugeordnete geodätische Kreise auf der Biegungsregelfläche zu sein.

Eine Linienfläche ist durch ihr Linienelement $d S$ gekennzeichnet:

(18) $$d S^2 = d u^2 + E\, d v^2$$ [1]),

[1]) Bianchi, Vorles. über Diff.-Geom. 1899. S. 218.

wo $E = A(v)\,u^2 + 2\,B(v)\,u + C(v)$ ist. Sie ist also dann in die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung verbiegbar, wenn eine Kurve $u = const$ existiert, die konstante geodätische Krümmung besitzt. Die Bedingung hierfür lautet: es muß für ein bestimmtes u sein

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u} = k. \tag{19}$$

Oder: Zwischen den Funktionen $A(v)$, $B(v)$, $C(v)$ besteht folgende lineare Relation mit konstanten Koëffizienten

$$f\,A(v) + h\,B(v) + k\,C(v) = O, \tag{IVa}$$

wobei aber f, h, k nicht unabhängig von einander sind, sondern die Gleichung

$$4\,f\,k = h^2 - 4 \tag{IVb}$$

erfüllen müssen. Umgekehrt: Besteht eine solche lineare Beziehung zwischen drei Funktionen A, B, C derselben Veränderlichen, so kann man stets ein u_0 so bestimmen, daß für diesen Wert $\frac{\partial E}{\partial u}$ $k\,E$ ist, falls man $E = A\,u^2 + 2\,B\,u + C$ setzt. Also:

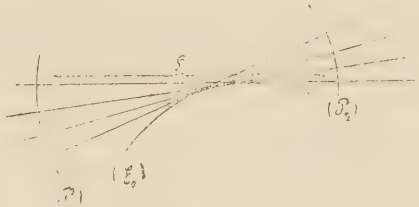
Eine Linienfläche ist dann auf die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung abwickelbar, wenn die Funktionen des einen Parameters, die in ihrer Fundamentalgröße erster Ordnung E als Koëffizienten der Potenzen des anderen auftreten, eine lineare Beziehung mit konstanten Koëffizienten f, h, k, zwischen denen die Gleichung $4\,f\,k = h^2 - 4$ besteht, erfüllen.

II. Besondere Biegungen.

A. Die Regelfläche mit Richtebene.

§ 1. Eigenschaften dieser Regelfläche.

Die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung soll so verbogen werden, daß ihre Erzeugenden alle einer Ebene parallel sind. Die Striktionskurve der windschiefen Regelfläche geht, da ja die Lage des Mittelpunktes einer Erzeugenden bei jeder Verbiegung erhalten bleibt, in die Striktionskurve der deformierten Fläche über. Man projiziere die zu untersuchende Biegungsregelfläche auf ihre Richtebene, welche man zweckmäßig als xy-Ebene nimmt. Die Erzeugenden der Biegungsregelfläche sind alle dieser Ebene parallel. Ihre Projektionen sind also Geraden in der Richtebene, die von der Projektion (E_0) der Striktionskurve der deformierten Regelfläche eingehüllt werden.



Figur 1.

Die Biegungskurven $(\overline{M}_1)$ und $(\overline{M}_2)$ der beiden zugeordneten Kurven konstanter Krümmung sind Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden und projizieren sich daher in zwei Evolventen (P_1) und (P_2) von (E_0). Umgekehrt ist die Kurve (E_0) die Evolute der Kurven (P_1) und (P_2).

Der Abstand entsprechender Punkte M_1 und M_2 der Kurven (M_1) und (M_2) ist gleich ihrem gemeinsamen konstanten Krümmungs-

radius ϱ. Dieser Abstand bleibt bei der Biegung ungeändert und projiziert sich in wahrer Länge. Bezeichnet man also mit ϱ_{I} den Krümmungsradius der Kurve (P_1), so folgt, daß der Krümmungsradius von (P_2)

(1) $$\varrho_{\mathrm{II}} = \varrho - \varrho_{\mathrm{I}}$$

ist. Der Radius der Krümmung der Kurve (P_1) hat aber den Wert

(2) $$\varrho_{\mathrm{I}}^{2} = \frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho} \,.$$

Aus (1) und (2) folgt

(3) $$\frac{\varrho_{\mathrm{II}}}{\varrho} = \left(\frac{\mathfrak{r}_1}{r_1}\right)^2 \,.$$

Das Verhältnis der Krümmungen der gegebenen Raumkurve konstanter Krümmung und der Projektion der Biegungskurve ihrer Zugeordneten ist gleich dem Quadrat des Quotienten aus Torsion und ganzer Krümmung der vorgegebenen Raumkurve.

Ferner: Der Winkel zweier aufeinanderfolgender Erzeugenden, d. i. der Winkel $d\,k_1$ der ganzen Krümmung, bleibt bei einer beliebigen Biegung der Hauptnormalenfläche erhalten und projiziert sich ebenfalls in wahrer Größe, und zwar als Winkel $d\tau_{\mathrm{I}}$ bzw. $d\tau_{\mathrm{II}}$ benachbarter Normalen von (P_1) bzw. (P_2). Also gilt

(4) $$d\,k_1 = d\tau_{\mathrm{I}} = d\tau_{\mathrm{II}} \quad \text{oder} \quad \frac{ds_1}{\mathfrak{r}_1} = \frac{ds_{\mathrm{I}}}{\varrho_{\mathrm{I}}} = \frac{ds_{\mathrm{II}}}{\varrho_{\mathrm{II}}} \,.$$

Das Verhältnis der ganzen Krümmung der gegebenen Raumkurve und der Krümmungen der Kurven (P_1) und (P_2) ist gleich dem Verhältnis ihrer Bogenelemente.

Aus (4) folgt wegen (2)

(5) $$\mathfrak{r}_1 = \varrho_1 \frac{d\,s_{\mathrm{I}}}{d\,s_1} \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = \mathfrak{r}_1 \frac{d\,s_1}{d\,s_{\mathrm{I}}}$$

und

(4a) $$\varrho_{\mathrm{I}} = \mathfrak{r}_1 \frac{d\,s_{\mathrm{I}}}{d\,s_1} \;;$$

mithin

(6) $$\frac{\varrho_1}{\varrho_{\mathrm{I}}} = \left(\frac{d\,s_1}{d\,s_{\mathrm{I}}}\right)^2 \,.$$

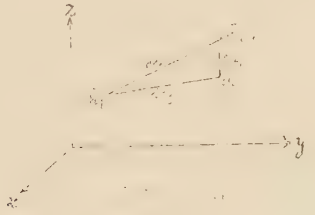
Die Krümmungsradien der gegebenen Raumkurve und der Pro-

jektion ihrer Biegungskurve verhalten sich wie die Quadrate ihrer Bogenelemente.

Die entsprechende Beziehung für (P_2) lautet folgendermaßen

$$\frac{\varrho \cdot \varrho_{II}}{r_1^{\,2}} = \left(\frac{d\,s_{II}}{d\,s_1}\right)^2 . \tag{7}$$

Die Gleichungen (4a) und (5) legen nahe, eine geometrische Deutung des Quotienten $\frac{d\,s_I}{d\,s_1}$ vorzunehmen:



Figur 2.

Es ist klar, daß man in dem Quotienten $\frac{d\,s_I}{d\,s_1}$ den Cosinus des Komplementwinkels der Kurve $(\overline{M}_1)$ gegen die z-Achse vor sich hat:

$$\sqrt{1-\overline{\gamma}_1^{\,2}} = \frac{d\,s_I}{d\,s_1} . \tag{8}$$

Aus (5) folgt nun

$$\frac{d\,s_I}{d\,s_1} = \frac{r_1}{\varrho_1} = sin\, H_1\ ^1) = cos\,(\frac{\pi}{2} - H_1) . \tag{9}$$

Somit hat man

$$\overline{\gamma}_1 = cos\, H_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{d\,s_I}{d\,s_1}\right)^2}, \tag{10}$$

und es gilt der Satz:

Die Tangente der Biegungskurve der Kurve konstanter Krümmung bildet mit dem Lote auf die Richtebene denselben Winkel wie die Tangente der ursprünglichen Kurve mit ihrer rektifizierenden Geraden.

Dieser Satz kann natürlich auch ganz analog für die Kurve $(\overline{M}_2)$ ausgesprochen werden.

---

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 30.

§ 2. Bestimmung der Gleichungen der Kurven $(\overline{M}_1)$ und $(\overline{M}_2)$.

a) Ansatz zur Bestimmung der kartesischen Gleichungen.

Da alle Erzeugenden der Biegungsfläche parallel zur $x\,y$-Ebene sind, so müssen alle Punkte, die auf derselben Erzeugenden liegen, dieselbe z-Koordinate haben: also

$$\overline{z_1} = \overline{z_2} \quad . \tag{11}$$

Nun ist (Figur 2)

$$d\,\overline{z_1} = \sqrt{d\,s_1^{\,2} - d\,s_{\mathrm{I}}^{\,2}} = \sqrt{d\,\overline{s_2}^{\,2} - d\,s_{\mathrm{II}}^{\,2}} \quad . \tag{12}$$

Somit folgt:

$$\overline{z_1} = \int\sqrt{1 - \left(\frac{d\,s_{\mathrm{I}}}{d\,s_1}\right)^2}\,d\,s_1 = \int\sqrt{\left(\frac{d\,s_1}{d\,s_{\mathrm{I}}}\right)^2 - 1}\,d\,s_{\mathrm{I}}$$

$$= \int\cos H_1\,d\,s_1 = \int\cos H_2\,d\,s_2,$$

man kann also die z-Koordinate mittels einer Quadratur bestimmen.

Die x- und y-Koordinaten lassen sich folgendermaßen ermitteln: Es ist möglich, die natürlichen Gleichungen der Kurven (P_1) und (P_2) in der Richtebene, wenigstens implizit, aufzustellen. Man kennt durch (2) ϱ_{I} als Funktion von s_1:

$$\varrho_{\mathrm{I}} = f_1\,(s_1) \tag{14}$$

und durch (3) ϱ_{II} als Funktion von s_1:

$$\varrho_{\mathrm{II}} = f_2\,(s_1). \tag{15}$$

Jetzt geht aus (4) hervor einerseits

$$s_{\mathrm{I}} = \int\frac{\varrho_{\mathrm{I}}}{\mathfrak{r}_1}\,d\,s_1 = \varphi_1\,(s_1), \tag{16}$$

andererseits

$$s_{\mathrm{II}} = \int\frac{\varrho_{\mathrm{II}}}{\mathfrak{r}_1}\,d\,s_1 = \varphi_2\,(s_1). \tag{17}$$

Eliminiert man aus (14) und (16) und aus (15) und (17) s_1, so erhält man die natürlichen Gleichungen der Projektionen der Biegungskurven der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten:

(18) $$F_1 (s_I , \varrho_I) = O$$

und

(19) $$F_2 (s_{II} , \varrho_{II}) = O.$$

Die Bestimmung der kartesischen Gleichungen der Biegungskurven der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten wird hiermit zurückgeführt auf das Problem der Bestimmung der kartesischen Gleichungen aus den natürlichen Gleichungen von ebenen Kurven, und dies ist durch Quadraturen möglich.

b) Ermittelung der natürlichen Gleichungen.

Die Gleichungen der Biegungsregelfläche haben die Form

$$\overline{X} = \overline{x_1} + t \cdot l_I , \qquad \overline{Y} = \overline{y_1} + t \cdot m_I , \qquad \overline{Z} = \overline{z_1} ,$$

wobei tür $\overline{z_1}$ der obige Wert eingetragen werden kann.

Es möge jetzt die Krümmung und Torsion der Kurven $(\overline{M_1})$ und $(\overline{M_2})$ berechnet werden. Die kartesischen Gleichungen dieser Biegungskurven stellen sich wie folgt dar:

(21) $(\overline{M_1})$: $$\overline{x_1} = x_I , \quad \overline{y_1} = y_I , \quad \overline{z_1} = \overline{z_1}$$

(22) $(\overline{M_2})$: $$\overline{x_2} = x_I + \varrho \cdot l_I , \quad \overline{y_2} = y_I + \varrho \cdot m_I , \quad \overline{z_2} = \overline{z_1}.$$

Unter Benutzung der Beziehungen[1])

(23) $$\frac{d s_2}{d s_1} = \frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{d \overline{z_1}}{d s_I}$$

ergibt sich für die Krümmungen von $(\overline{M_1})$ und $(\overline{M_2})$:

(24) $$\frac{1}{\overline{\varrho_1}^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} \left(1 + \frac{\mathfrak{r}_1^4}{r_1^4} r_1'^2 \right) = \frac{1}{\varrho_1^2} \left(1 + \frac{\varrho_{II}^2}{\varrho_1^2} r_1'^2 \right) ,$$

(25) $$\frac{1}{\overline{\varrho_2}^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} \left(1 + \frac{\mathfrak{r}_1^4}{\varrho_1^2 r_1^2} r_1'^2 \right) = \frac{1}{\varrho_1^2} \left(1 + \frac{\varrho_1^2}{r_1^2} r_1'^2 \right) ,$$

und für ihre Torsionen:

(26) $$\frac{1}{\overline{r_1}} = \frac{1}{r_1} \frac{1 + \frac{\mathfrak{r}_1^2}{r_1} \left(2 \frac{\mathfrak{r}_1^2}{\varrho_1^2} \frac{r_1'^2}{r_1} + \frac{r_1' \mathfrak{r}_1'}{\mathfrak{r}_1} - r_1'' \right)}{1 + \frac{\mathfrak{r}_1^4}{r_1^4} \cdot r_1'^2} ,$$

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 107.

$$(27)\qquad \frac{1}{\bar{r}_2} = \frac{r_1}{\varrho_1^{\,2}}\cdot$$

$$1 - \frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{r_1}\left\{2\frac{1}{r_1}\left(1+\frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)r_1' - 4\frac{1}{\varrho_1^{\,2}}\frac{r_1^{\,5}}{\mathfrak{r}_1^{\,4}}\left(2+\frac{\varrho_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)\mathfrak{r}_1'^{\,2} - \frac{\mathfrak{r}_1'\,r_1'}{\mathfrak{r}_1} + r_1'' - 2\frac{r_1^{\,3}}{\mathfrak{r}_1^{\,3}}\mathfrak{r}_1''\right\}$$
$$1 + \frac{\mathfrak{r}_1^{\,4}}{r_1^{\,2}\varrho_1^{\,2}}\,r_1'^{\,2}$$

Man kann also, ohne die kartesischen Gleichungen der Biegungskurven $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$ überhaupt zu kennen, deren natürliche Bestimmungsstücke sofort aus (24) bis (27) ermitteln; und man bemerkt: In den Gleichungen (24) und (26) sind die natürlichen Gleichungen von $(\bar{M}_1)$ und in (25) und (27) die von $(\bar{M}_2)$ implizit enthalten.

Anmerkung. Um die Gleichungen der Striktionskurve $(\bar{E})$ zu bekommen, hat man verschiedene Möglichkeiten. Am einfachsten wird man zum Ziele gelangen, wenn man entweder die Gleichungen der Biegungsregelfläche aufstellt und dann $t = \frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1}$ setzt, in diesem Falle würde man erhalten

$$\bar{x}^* = \bar{x}_1 + \frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1} l_1, \qquad \bar{y}^* = \bar{y}_1 + \frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1} m_1, \qquad \bar{z}^* = \bar{z}_1;$$

oder aber man bestimmt die gemeinsame Evolute[1]) der Kurven (P_1) und (P_2) (vgl. III. § 2).

§ 3. Wann ist die Biegungskurve der Kurve konstanter Krümmung wieder eine Kurve konstanter Krümmung?

Die Biegungskurve der gegebenen Raumkurve konstanter Krümmung wird bei dieser speziellen Biegung nur dann wieder eine Kurve konstanter Krümmung sein, wenn die Ausgangskurve gewisse besondere Eigenschaften besitzt.

Soll die Krümmung von $(\bar{M}_1)$ konstant sein, so muß auch

$$(28)\qquad \varrho_1^{\,2}\cdot\left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1^{\,2}} - \frac{1}{\varrho_1^{\,2}}\right) = \frac{\varrho_1^{\,2}}{a_1^{\,2}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a_1} = \pm\sqrt{\frac{1}{\bar{\varrho}_1^{\,2}} - \frac{1}{\varrho_1^{\,2}}}$$

konstant sein. Nach (24) ist aber dann

[1]) Vgl. G. Scheffers, Theorie d. Kurven. 1910. S. 64 f. S. 98 f.

(29) $\dfrac{d\,\frac{\varrho_1}{r_1}}{ds_1} = \dfrac{\varrho_1^2}{r_1^2}\cdot\dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{a_1}\left(1+\dfrac{\varrho_1^2}{r_1^2}\right)$, woraus folgt $\dfrac{d\,\frac{\varrho_1}{r_1}}{1+\left(\frac{\varrho_1}{r_1}\right)^2} = \dfrac{ds_1}{a_1}$.

Durch eine Quadratur bekommt man hieraus, wenn die Integrationskonstante gleich Null gesetzt wird:

(30) $$arc\ tg\ \frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{s_1}{a_1} \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho_1}{r_1} = tg\,\frac{s_1}{a_1}\ .$$

Somit ergibt sich der Satz:

Die Biegungskurve einer Kurve konstanter Krümmung ist dann und nur dann wieder eine Kurve konstanter Krümmung, wenn das Verhältnis von Torsion und Krümmung der Ausgangskurve die trigonometrische Tangente eines beliebigen[2]) *Vielfachen ihrer Bogenlänge ist.*

Oder:

Jede Raumkurve, die die natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = k\ ,\ \tau = k\ tg\ ms$$

besitzt, wo k und m beliebige Konstanten bedeuten, geht bei obiger Biegung wieder in eine Kurve konstanter Krümmung über.

Nach früheren Ergebnissen (I. (12)) ist stets

$$\varrho_1 \geqq \overline{\varrho_1}; \qquad \text{mithin} \qquad \frac{1}{\varrho_1} \leqq \frac{1}{\overline{\varrho_1}}\ ;$$

und man sieht: Die Konstante a_1 ist immer reell.

Die vorgelegte Spezialfrage läßt sich nun noch weiter verfolgen: Angenommen die natürliche Gleichung einer gegebenen Kurve konstanter Krümmung sei $\frac{\varrho_1}{r_1} = tg\,\frac{s_1}{a_1}$. Führt man den Winkel H_1 der rektifizierenden Geraden mit der Tangente ein, so weiß man

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = tg\ H_1\ ,$$

somit

(31) $$\frac{\varrho_1}{r_1} = -\ cotg\ H_1 = tg\left(\frac{\pi}{2}+H_1\right).$$

---

[1]) Das hier auftretende Minuszeichen ist in a_1 hineingezogen worden.

[2]) auch gebrochenen.

Aus (30) und (31) folgt nun

$$\frac{s_1}{a_1} = \frac{\pi}{2} + H_1 \text{ , also: } s_1 = a_1 \left(H_1 + \frac{\pi}{2} \right) \tag{32}$$

und

$$ds_1 = a_1 \, . \, dH_1 \, . \tag{33}$$

Man erhält die Sätze:

Geht eine Kurve konstanter Krümmung, falls man ihre Hauptnormalenfläche auf eine Regelfläche mit Richtebene verbiegt, wieder in eine Kurve konstanter Krümmung über, dann ist ihre Bogenlänge eine lineare Funktion des Winkels H_1.

Oder: *Die Aenderung der Bogenlänge der gegebenen Kurve ist proportional der Aenderung des Winkels H_1.*

Da wegen $r_1 = - \varrho_1 \, tg \, H_1$

$$r_1' = - \frac{\varrho_1}{a_1 \, cos^2 H_1} \text{ und } r_1'' = - 2 \frac{\varrho_1}{a_1} \frac{sin \, H_1}{cos^3 H_1},$$

wegen $\mathfrak{r}_1 = \varrho_1 \, sin \, H_1$

$$\mathfrak{r}_1' = \frac{\varrho_1}{a_1} \, cos \, H_1 \quad \text{und } \mathfrak{r}_1'' = - \frac{\varrho_1}{a_1^2} \, sin \, H_1$$

wird, so ergibt sich für die konstante Krümmung dieser Biegungskurve der Kurve konstanter Krümmung

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} \left(1 + \frac{\varrho_1^2}{a_1^2} \right) = \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{a_1^2} \tag{34}$$

und für ihre Torsion

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1} \, , \tag{35}$$

was nach dem Satze in I. § 3. c. von vornherein zu erwarten war.

Welche Beziehungen gelten nun für die zugeordnete Kurve konstanter Krümmung und ihre Biegungskurve?

Die Krümmung und Torsion der Zugeordneten hat den Wert

$$\varrho_2 = \varrho_1 \, , \tag{36}$$

$$r_2 = \frac{\varrho_1^2}{r_1} \, . \tag{37}$$

Mithin geht aus (30) hervor

$$\frac{\varrho_2}{r_2} = cotg \, \frac{s_1}{a_1} \, . \tag{38}$$

Ist das Verhältnis von Torsion und Krümmung für eine gegebene Kurve konstanter Krümmung gleich der trigonometrischen Tangente eines beliebigen Vielfachen ihrer Bogenlänge s_1, so ist dasselbe Verhältnis, gebildet für die Zugeordnete, gleich der Cotangente desselben Vielfachen der Bogenlänge s_1.

Für das Verhältnis der Bogenelemente eines Paares von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung gilt

(39) $$\frac{ds_2}{ds_1} = \frac{\varrho_1}{r_1} .$$

Hieraus folgt

(40) $$ds_2 = tg \frac{s_1}{a_1} \, ds_1 ,$$

und durch Integration bekommt man, falls man die Integrationskonstante gleich Null setzt:

(41) $$- \frac{s_2}{a_1} = lg \, cos \frac{s_1}{a_1}$$

oder

(41a) $$s_2 = - a_1 \, lg \, cos \frac{s_1}{a_1} = - a_1 \, lg \left(- \frac{r_1}{\varrho_1} \right) .$$

Die eine natürliche Gleichung der Zugeordneten ist

$$\varrho_2 = \varrho_1 .$$

Die andere ergibt sich aus (41); es wird

$$e^{- \frac{s_2}{a_1}} = cos \frac{s_1}{a_1} ,$$

mithin entsteht aus (38)

(41b) $$\frac{\varrho_2}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{e^{2 \frac{s_2}{a_1}} - 1}} .$$

Für die Krümmung und Torsion der Biegungskurve der Zugeordneten ergeben sich

(42) $$\frac{1}{\varrho_2^2} = \frac{1}{\varrho_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{a_1^2} \right) = \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{a_1^2} \, cotg^2 \frac{s_1}{a_1}$$

und

$$\frac{1}{\overline{r}_2} = \frac{1}{r_2}; \tag{43}$$

also läßt sich der Satz aussprechen:

Geht, falls man die gemeinschaftliche Hauptnormalenfläche eines Paares von zugeordneten Kurven konstanter Krümmung auf eine Regelfläche mit Richtebene verbiegt, die Kurve konstanter Krümmung wieder in eine Kurve konstanter Krümmung über, so bleiben die Torsionen der Kurven des Paares ungeändert.

Es bleibt also jetzt auch die Torsion der Zugeordneten erhalten. Ihre Biegungskurve ist aber keine Kurve konstanter Krümmung.

Sehr einfach drücken sich auch die Radien der ganzen Krümmung der Kurven $(\overline{M}_1)$ und $(\overline{M}_2)$ aus:

$$\frac{1}{\overline{\mathfrak{r}}_1^{\,2}} = \frac{1}{\mathfrak{r}_1^{\,2}} + \frac{1}{a_1^{\,2}}, \tag{44}$$

$$\frac{1}{\overline{\mathfrak{r}}_2^{\,2}} = \frac{1}{\mathfrak{r}_2^{\,2}} + \frac{1}{a_1^{\,2}} \frac{\varrho_2^{\,2}}{r_2^{\,2}}. \tag{45}$$

Wie immer wenn die Kurve konstanter Krümmung wieder in eine Kurve konstanter Krümmung gebogen wird, ist auch hier der Winkel ω_1 konstant. Die Erzeugenden der Biegungsregelfläche mit Richtebene schließen also alle für diese spezielle Kurvenklasse denselben Winkel mit den Hauptnormalen von $(\overline{M}_1)$ ein.

B. Einige weitere besondere Regelflächen.

§ 1. Biegung der Hauptnormalenfläche in die Hauptnormalenfläche einer Orthogonaltrajektorie.

Grundlegend für die auszuführende Biegung ist die Tatsache, daß sich eine windschiefe Regelfläche in die Hauptnormalenfläche jeder beliebigen Orthogonaltrajektorie ihrer Erzeugenden biegen läßt. Also wird auch die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung (M)

$$X = x + t \cdot l\,, \quad Y = y + t \cdot m\,, \quad Z = z + t \cdot n$$

so gebogen werden können, daß eine beliebige, dem Parameterwerte t_0 entsprechende Orthogonaltrajektorie (N) nach der Biegung die Erzeugenden als Hauptnormalen besitzt.

Welche Beziehungen bestehen zwischen den Biegungsinvarianten?

Die Bogenelemente der beiden Kurven (M) und (N) hängen folgendermaßen zusammen:

$$ds_0^2 = \left(1 - 2\frac{t_0}{\varrho} + \frac{t_0^2}{\mathfrak{r}^2}\right) ds^2 , \tag{46}$$

und zwar gilt dies unabhängig davon, ob die gegebene Raumkurve eine Kurve konstanter Krümmung ist oder nicht. Ferner:

Wird die Hauptnormalenfläche der Kurve (M) in die Hauptnormalenfläche von (N) gebogen, so geht (M) in eine Kurve $(\bar{M})$ über und (N) in eine Kurve $(\bar{N})$. Die Mittelpunkte der Erzeugenden bleiben bei jeder Biegung erhalten. Der Abstand des Mittelpunktes einer beliebigen Erzeugenden der Hauptnormalenfläche der Kurve konstanter Krümmung von dem entsprechenden Punkte der Kurve (N) ist

$$\frac{\mathfrak{r}^2}{\varrho} - t_0 ,$$

der verbogenen Fläche von dem entsprechenden Punkte der Kurve $(\bar{N})$ ist

$$\frac{\bar{\mathfrak{r}}_0^2}{\bar{\varrho}_0} .$$

Somit hat man

$$\frac{\bar{\mathfrak{r}}_0^2}{\bar{\varrho}_0} = \frac{\mathfrak{r}^2}{\varrho} - t_0 . \tag{47}$$

Ebenso bleibt der Parameter einer Regelfläche bei Verbiegung ungeändert. Der Parameter der Hauptnormalenfläche von (M) ist

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{r}^2}{r} ,$$

der der Biegungsregelfläche

$$\bar{\varkappa} = \frac{\bar{\mathfrak{r}}_0^2}{r_0} .$$

Mithin ist

$$\frac{\bar{\mathfrak{r}}_0^2}{r_0} = \frac{\mathfrak{r}^2}{r} . \tag{48}$$

Die Relationen (47) und (48) gelten, ebenso wie (46), für jede beliebig vorgegebene Raumkurve (M). Sie liefern den Zusammenhang zwischen den Kurven (M) und (N).

Es erhebt sich nun die Frage: Kann die Hauptnormalenfläche der Kurve konstanter Krümmung wieder in die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung gebogen werden, d. h. so, daß $\overline{\varrho_0}$ konstant wird?

Aus (47) und (48) folgt, daß dies nur eintritt, wenn die ursprüngliche Kurve eine gewöhnliche Schraubenlinie ist.

Anmerkung. Die oben abgeleiteten Beziehungen gelten unabhängig davon, ob (M) konstante Krümmung besitzt. Legt man eine Cesàrosche Kurve von der Form

$$\frac{P}{\varrho} + \frac{Q}{r} = \frac{A}{\mathfrak{r}^2} ,$$

wo ϱ nicht konstant sein soll, zugrunde, so erhält man für die natürlichen Bestimmungsstücke der Kurve $(\overline{N})$

$$\frac{\mathfrak{r}_0^2}{\varrho_0} = \frac{A}{P + \frac{\varrho}{r} Q} = t_0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{r}_0^2}{r_0} = \frac{A}{Q + \frac{r}{\varrho} P} .$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{\varrho}{r} ,$$

dann bekommt man den Zusammenhang der natürlichen Konstanten der Kurve $(\overline{N})$:

$$\frac{P}{\varrho_0} + \frac{Q}{r_0} = \frac{A - t_0 P}{\mathfrak{r}_0^2} = \frac{B}{\mathfrak{r}_0^2}$$

und kann den Satz aussprechen:

Eine beliebige Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden der Hauptnormalenfläche einer Cesàroschen Kurve obiger Form geht, falls man diese Regelfläche auf die Hauptnormalenfläche der Orthogonaltrajektorie deformiert, in eine Cesàrosche Kurve über, deren Gleichung dieselbe Form hat.

§ 2 Biegung der Hauptnormalenfläche derart, daß die Kurve konstanter Krümmung eben wird.

Ein beliebiger Punkt der ebenen Kurve $(M_0$, in die die Kurve konstanter Krümmung übergeht, habe, da man zweckmäßig als Ebene

dieser Kurve die xy-Ebene wählt, die Koordinaten x_0, y_0. Der Winkel, den die Erzeugenden der Biegungsregelfläche mit der Ebene dieser Kurve bilden, sei ω_0. Dann lauten die Gleichungen der Biegungsregelfläche

(49) $\overline{X} = x_0 + t \cdot l_0 \cdot \cos \omega_0 , \quad \overline{Y} = y_0 + t \cdot m_0 \cdot \cos \omega_0 , \quad \overline{Z} = t \cdot \sin \omega_0 .$

Nach den Formeln (I) und (II) des ersten Teils muß nun gelten

(50) $$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_0} \cos \omega_0$$

und wegen

$$\frac{1}{r_1} = 0$$

(51) $$\frac{1}{r_1} = - \frac{d\omega_0}{ds_1}$$

oder

(50a) $$d\tau_0 = \frac{d\tau_1}{\cos \omega_0}$$

und

(51a) $$d\omega_0 = - d\sigma_1 .$$

ω_0 ist der Winkel der Erzeugenden der Biegungsregelfläche gegen die Ebene jener ebenen Biegungskurve. Der Winkel, den die Erzeugenden mit den Binormalen der ebenen Kurve, welche alle parallel der z-Achse sind, einschließen, beträgt

$$\frac{\pi}{2} - \omega_0 .$$

Man hat also den Satz:

Biegt man die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung derart, daß die Erzeugenden der Biegungsregelfläche mit einer im Raume festen Richtung einen Winkel bilden, dessen Aenderung gleich dem Schmiegungswinkel der gegebenen Raumkurve ist, so geht letztere in eine ebene Kurve über, deren Ebene senkrecht zu jener im Raume festen Richtung ist.

Jetzt interessiert die Biegungskurve der Zugeordneten. Diese ist keine ebene Kurve. Aber sie bildet mit jener ebenen Biegungskurve auf der Biegungsregelfläche ein orthogonales Kurvenpaar. Die Bogenelemente dieser beiden Kurven kreuzen sich also unter

rechtem Winkel, und jede von beiden liegt auf der Polarfläche der anderen. Die Normalebenen der ebenen Biegungskurve umhüllen eine Zylinderfläche, welche die Ebene der Kurve in deren Evolute schneidet. Daraus folgt der Satz:

Biegt man die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung so, daß die Kurve konstanter Krümmung eben wird, dann ist die Projektion der Biegungskurve der Zugeordneten auf die Ebene jener Kurve deren Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Diesen Satz hätte man auch aus den Gleichungen der Biegungskurve der Zugeordneten

(52) $\bar{x}_2 = x_0 + \varrho_0 \cdot l_0, \quad \bar{y}_2 = y_0 + \varrho_0 \cdot m_0, \quad \bar{z}_2 = \varrho_0 \cdot tg\, \omega_0$

ablesen können.

§ 3. Biegung der Hauptnormalenfläche in eine Regelfläche mit ebener Striktionslinie.

Eine Linienfläche habe jetzt eine ebene Kurve (x, y) als Striktionslinie. Die Richtungskosinus einer beliebigen Erzeugenden seien ξ, η, ζ. Die Gleichungen der Fläche heißen dann

(53) $$\bar{X} = x + t\xi, \quad \bar{Y} = y + t\eta, \quad \bar{Z} = t\zeta .$$

Die Bedingung dafür, daß jene ebene Kurve $(\mathfrak{E})$ Striktionslinie dieser Regelfläche ist, lautet:

(54) $$d\xi\, dx + d\eta\, dy = 0 .$$

Bezeichnet man mit φ, ψ, χ die Winkel, die eine beliebige Erzeugende mit den Geraden des jeweiligen Hauptdreikants von $(\mathfrak{E})$ bildet, so kann man setzen

(55) $\xi = \alpha \cos\varphi + l \cos\psi, \quad \eta = \beta \cos\varphi + m \cos\psi, \quad \zeta = \cos\chi.$

Aus (54) ergibt sich für den Krümmungsradius ϱ von $(\mathfrak{E})$

(56) $$\frac{1}{\varrho} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\psi}\frac{d\varphi}{ds} .$$

Die Linienfläche mit ebener Striktionskurve soll nun auf die Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung (M_1)

(57) $X = x_1 + \frac{\mathfrak{r}_1^2}{\varrho_1} l_1 + t l_1, \quad Y = y_1 + \frac{\mathfrak{r}_1^2}{\varrho_1} m_1 + t m_1, \quad Z = z_1 + \frac{\mathfrak{r}_1^2}{\varrho_1} n_1 + t n_1$

abwickelbar sein. Daher ist jetzt die Striktionslinie als Leitkurve gewählt. Ihre Fundamentalgrößen erster Ordnung lauten bei dieser Darstellung

$$(58)\qquad E=1+\frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1^{\,2}}\left(4\,\mathfrak{r}_1'^{\,2}-1\right)+\frac{t^2}{\mathfrak{r}_1^{\,2}},\quad F=\frac{2\,\mathfrak{r}_1'\mathfrak{r}_1}{\varrho_1},\quad G=1,$$

die der Regelfläche mit ebener Striktionslinie, bezogen auf dieselben Parameter, sind

$$\bar{E}=\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\Bigg\{1-2\,t\left(\frac{\cos\psi}{\varrho}+\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{ds}\right)+t^2\left[\sum{}^{1)}\sin^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varrho^2}\left(\cos^2\varphi+\cos^2\psi\right)-\frac{2}{\varrho}\left(\cos\varphi\sin\psi\frac{d\psi}{ds}-\cos\psi\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right)\right]\Bigg\},$$

$$(59)\qquad \bar{F}=\frac{ds}{ds_1}\left(\cos\varphi+\frac{t}{2}\sum{}^{1)}\frac{d\cos^2\varphi}{ds}\right),\quad \bar{G}=1.$$

Da bei der Biegung das Bogenelement erhalten bleibt[2]), ergibt sich

$$(60)\qquad \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2=1+\frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1^{\,2}}\left(4\,\mathfrak{r}_1'^{\,2}-1\right)^{3)},$$

$$(61)\qquad \cos\varphi=2\,\frac{\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_1'}{\varrho_1}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\mathfrak{r}_1^{\,2}}{\varrho_1^{\,2}}(4\,\mathfrak{r}_1'^{\,2}-1)}}.$$

Damit ist der Winkel φ eindeutig bestimmt.
Ferner:

$$\frac{1}{\varrho}=-\frac{\sin\varphi}{\cos\psi}\,\frac{d\varphi}{ds},$$

vgl. (56), und schließlich, unter Berücksichtigung von (56),

$$(62)\qquad \left(\frac{d\cos\psi}{ds_1}+\frac{\cos\varphi}{\varrho}\,\frac{ds}{ds_1}\right)^2+\left(\frac{d\cos\chi}{ds_1}\right)^2=\frac{1}{\mathfrak{r}_1^{\,2}}.$$

Nun ist $\cos\chi=\sqrt{1-\cos^2\varphi-\cos^2\psi}$, und $\cos\varphi$ ist bekannt. Aus (62) muß sich also $\cos\psi$ berechnen lassen.

---

[1]) Das Summenzeichen bezieht sich auf die Winkel φ, ψ, χ.
[2]) G. Scheffers, Theorie der Flächen. 1910. S. 17.
[3]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 100.

Nach einigen Umformungen erhält man für $\cos\psi$ folgende Differentialgleichung erster Ordnung vom zweiten Grade

$$\left(\cos\psi\,\frac{d\cos\psi}{ds_1}\right)^2 \tag{63}$$

$$+\cos\psi\,\frac{d\cos\psi}{ds_1}\,\frac{d\cos^2\varphi}{ds_1}+\frac{\cos^2\psi}{\mathfrak{r}_1^{\,2}}\left(\frac{\cos^2\psi}{\sin^2\varphi}-1\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{d\cos^2\varphi}{ds_1}\right)^2=0.$$

Hat man $\cos\varphi$ ausgerechnet und $\cos\psi$ mit Hilfe obiger Differentialgleichung ermittelt, so kann man die natürliche Gleichung jener ebenen Striktionskurve sofort für jede gegebene Kurve konstanter Krümmung aufstellen.

Aus (63) ergeben sich unendlich viele Werte für $\cos\psi$. Die Biegung ist für die vorliegende Flächenklasse nichts Eigentümliches; es liegen also hier genau dieselben Verhältnisse vor wie im allgemeinen Falle.

Eine Ausnahme tritt ein, wenn φ konstant ist. Dann ist die Striktionslinie geodätisch, und es gibt eine Biegung, bei der sie eine gerade Linie, und, wenn

$\varphi \gtrless \frac{\pi}{2}$ ist, eine zweite Biegung, bei der sie eine reguläre ebene Kurve wird.[1])

---

[1]) vgl. E. Salkowski, Zum Biegungsproblem der Regelflächen. Deutsche Math.-Ver. 22. S. 67, 68.

III. Die Regelflächen mit geodätischer Striktion.

§ 1. Die Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung mit geodätischer Striktionslinie.

Die Striktionskurve einer windschiefen Regelfläche ist geodätisch, falls sie die Erzeugenden der Regelfläche unter konstantem Winkel schneidet.[1]) Bezeichnet man mit ε den Winkel, den die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche einer gegebenen Raumkurve konstanter Krümmung mit den Erzeugenden einschließt, und mit δ den Winkel, den die Verbindungsgerade entsprechender Punkte der rektifizierenden Gratlinien der Kurven (M_1) und (M_2), welche durch den Mittelpunkt der Erzeugenden geht, mit den Hauptnormalen von (M_1) bildet, so folgt

$$tg\,\delta = 2\,tg\,\varepsilon\ .^{2}) \tag{1}$$

Man bemerkt: Die Kurve (E) ist nur dann geodätische Linie auf der Hauptnormalenfläche, wenn der Winkel δ konstant ist. Nun ist δ nur für die Kurven konstanter Krümmung konstant, die auf Böschungsflächen geodätisch sind. Ist (M_1) auf einer Böschungsfläche geodätisch, dann ist ihre Zugeordnete ebenfalls eine geodätische Linie auf einer Böschungsfläche, einer Böschungsfläche, deren einhüllende Ebenen parallel den Einhüllenden der ersteren sind, und die rektifizierenden Gratlinien der beiden Kurven sind parallele und kongruente Schraubenlinien. Da eine Kurve geodätisch ist auf allen Flächen, die sich in ihr berühren, so ist (E) dann auch geodätisch auf der gemeinsamen zweiten rektifizierenden Fläche von (M_1) und (M_2), d. i. der Mittelfläche der gemeinschaftlichen Hauptnormalenfläche.[3])

---

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 82.

[2]) a. a. O. S. 109.

[3]) a. a. O. S. 102.

Die Mittelfläche einer windschiefen Regelfläche, deren Erzeugenden alle mit einer im Raume festen Richtung einen konstanten Winkel einschließen, ist eine Zylinderfläche. Mithin:

Die geodätische Striktionslinie der Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung, die auf einer Böschungsfläche geodätisch ist, ist eine Schraubenlinie.

Auf der Mittelfläche der Hauptnormalenfläche einer Kurve konstanter Krümmung mit geodätischer Striktion liegen, als Geodätische, drei Schraubenlinien: die rektifizierenden Gratlinien der Kurve und ihrer Zugeordneten und die Striktionskurve der Hauptnormalenfläche.

Man kennt nun alle diese Kurven konstanter Krümmung, die auf Böschungsflächen geodätisch sind; ihre kartesischen Gleichungen sind explizit angebbar und lauten, wenn man, was ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit sofort geschehen kann, ihre Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = 1$$

voraussetzt:[1])

$$x_1 = -\sqrt{1-n^2}\left\{\frac{1-n}{4(1+2n)}\sin(1+2n)v + \frac{1+n}{4(1-2n)}\sin(1-2n)v + \frac{1}{2}\sin v\right\},$$

$$(2)\quad y_1 = +\sqrt{1-n^2}\left\{\frac{1-n}{4(1+2n)}\cos(1+2n)v + \frac{1+n}{4(1-2n)}\cos(1-2n)v + \frac{1}{2}\cos v\right\},$$

$$z_1 = \frac{1-n^2}{4n}\cos 2n\, v\ .$$

Diese Kurven sind nur dann reell, falls

$$-1 < n < +1$$

ist, und die rechten Seiten von (2) lassen erkennen, daß zwischen den Koordinaten nur dann algebraische Gleichungen bestehen, wenn n eine rationale Zahl ist. Ihr Bogenelement hat den Wert

---

[1]) E. Salkowski, Zur Transformation von Raumkurven. Math. Ann. 66 S. 534 u. f.

(3) $$ds_1 = \sqrt{1-n^2} \cdot \cos n v \, dv \, .$$

Die Richtungskosinus ihrer Hauptnormalen sind

(4) $$l_1 = \sqrt{1-n^2} \cdot \sin v, \quad m_1 = -\sqrt{1-n^2} \cdot \cos v, \quad n_1 = -n.$$

Ferner ergibt sich für die Krümmung

(5) $$\frac{1}{\varrho_1} = 1$$

und die Torsion

(6) $$\frac{1}{r_1} = -\operatorname{tg} n v \, .$$

Die Hauptnormalenfläche dieser Kurven besitzt die Gleichungen

$$X = -\sqrt{1-n^2} \left\{ \frac{1-n}{4(1+2n)} \sin(1+2n)v + \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin(1-2n)v + \left(\frac{1}{2} - t\right) \sin v \right\},$$

(7) $$Y = +\sqrt{1-n^2} \left\{ \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos(1+2n)v + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos(1-2n)v + \left(\frac{1}{2} - t\right) \cos v \right\},$$

$$Z = \frac{1-n^2}{4n} \cos 2n v - tn \, .$$

Die zugeordneten Kurven konstanter Krümmung haben die kartesischen Gleichungen

$$x_2 = -\sqrt{1-n^2} \left\{ \frac{1-n}{4(1+2n)} \sin(1+2n)v + \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin(1-2n)v - \frac{1}{2} \sin v \right\},$$

(8) $$y_2 = +\sqrt{1-n^2} \left\{ \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos(1+2n)v + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos(1-2n)v - \frac{1}{2} \cos v \right\},$$

$$z_2 = \frac{1-n^2}{4n} \cos 2nv - n \ .$$

Ihr Bogenelement drückt sich folgendermaßen aus

$$ds_2 = \sqrt{1-n^2}\ \sin n\, v\, dv\,, \tag{9}$$

und die Richtungskosinus ihrer Hauptnormalen sind

$$l_2 = -\sqrt{1-n^2}\ \sin v,\ m_2 = \sqrt{1-n^2}\cos v,\quad n_2 = n\ . \tag{10}$$

Man erhält weiter für die Krümmung

$$\frac{1}{\varrho_2} = 1 \tag{11}$$

und die Torsion

$$\frac{1}{r_2} = -\ cotg\ n\ v. \tag{12}$$

Die rechten Seiten der Gleichungsysteme (2) und (8) lassen erkennen, daß die Kurven konstanter Krümmung und ihre Zugeordneten auf Rotationsflächen zweiter Ordnung mit vertikaler Umdrehungsachse

$$A\,(x^2 + y^2) = B + C\,(z + D)^2$$

liegen; und zwar gehören die Kurven (M_1) konstanter Krümmung einer Rotationsfläche an, welche bestimmt ist durch

$$A_1 = \frac{1}{1-n^2}\ ,\quad B_1 = \frac{27\ n^4}{4\,(1-n^2)\ (1-4n^2)^2}\ ,$$
$$C_1 = \frac{4n^2}{(1-n^2)\,(1-4n^2)}\ ,\quad D_1 = \frac{1}{4n}\,(1+2n^2)\ , \tag{13}$$

während die Zugeordneten (M_2) auf einer Rotationsfläche liegen, für die

$$A_2 = \frac{1}{1-n^2}\ ,\quad B_2 = \frac{27\,n^4}{4\,(1-n^2)\ (1-4\,n^2)^2}\ ,$$
$$C_2 = \frac{4\,n^2}{(1-n^2)\ (1-4n^2)}\ ,\quad D_2 = n - \frac{1}{4n}\,(1+2\,n^2) \text{ ist.} \tag{14}$$

Die Kurven (M_1) und (M_2) liegen also auf zwei kongruenten Flächen; diese sind nur um die Strecke n längs der Umdrehungsachse gegeneinander verschoben.

Wendet man die allgemeinen Formeln von Schraubenlinien auf Rotationsflächen zweiten Grades an. so ergibt sich für die kartesischen Gleichungen der rektifizierenden Gratlinie von (M_1)

$$\xi_1 = + \frac{3n\sqrt{1-n^2}}{4} \left\{ \frac{\sin(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\sin(1-2n)v}{1-2n} \right\},$$

$$(15)\quad \eta_1 = - \frac{3n\sqrt{1-n^2}}{4} \left\{ \frac{\cos(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\cos(1-2n)v}{1-2n} \right\},$$

$$\zeta_1 = \frac{3(1-n^2)}{4n} \cos 2nv - \frac{1-n^2}{2n},$$

während ihre natürlichen Gleichungen lauten

$$(16)\quad \frac{r}{\varrho} = \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} = m, \quad 4s^2 + \varrho^2 = \left(\frac{3\sqrt{1-n^2}}{2n}\right)^2 = \left(\frac{3}{2m}\right)^2.$$

Die rektifizierende Gratlinie der Zugeordneten hat die kartesischen Gleichungen

$$\xi_2 = + \frac{3n\sqrt{1-n^2}}{4} \left\{ \frac{\sin(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\sin(1-2n)v}{1-2n} \right\},$$

$$(17)\quad \eta_2 = - \frac{3n\sqrt{1-n^2}}{4} \left\{ \frac{\cos(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\cos(1-2n)v}{1-2n} \right\},$$

$$\zeta_2 = \frac{3(1-n^2)}{4n} \cos 2nv - \frac{1+n^2}{2n};$$

ihre natürlichen Gleichungen sind

$$(18)\quad \frac{r}{\varrho} = m, \qquad 4s^2 + \varrho^2 = \left(\frac{3}{2m}\right)^2.$$

Für die Striktionskurve der Hauptnormalenfläche erhält man

$$x^* = + \frac{3n\sqrt{1-n^2}}{4} \left\{ \frac{\sin(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\sin(1-2n)v}{1-2n} \right\},$$

$$(19)\quad y^* = - \frac{3n\sqrt{1-n^2}}{4} \left\{ \frac{\cos(1+2n)v}{1+2n} - \frac{\cos(1-2n)v}{1-2n} \right\},$$

$$z^* = \frac{1-3n^2}{4n} \cos 2nv - \frac{n}{2}.$$

Ihre natürlichen Gleichungen ergeben sich, da das Bogenelement

$$ds^* = \frac{\sqrt{3n^2+1}}{2} \sin 2nv dv, \tag{20}$$

die Krümmung

$$\frac{1}{\varrho^*} = \frac{6n\sqrt{1-n^2}}{3n^2+1} \frac{1}{\sin 2nv} \tag{21}$$

und die Torsion

$$\frac{1}{r^*} = -2 \frac{3n^2-1}{3n^2+1} \frac{1}{\sin 2nv} \tag{22}$$

ist, folgendermaßen:

$$\frac{r}{\varrho} = -\frac{3n\sqrt{1-n^2}}{3n^2-1}, \quad 4s^2+9\frac{1-n^2}{3n^2+1}\varrho^2 = \left(\frac{\sqrt{3n^2+1}}{2n}\right)^2. \tag{23}$$

Aus den natürlichen Gleichungen (16), (18), (23) folgt unmittelbar, daß diese drei Kurven Schraubenlinien auf Rotationsflächen zweiter Ordnung sind. Die Rückkehrkanten (D_1) und (D_2) der rektifizierenden Fläche von (M_1) und (M_2) liegen auf der Rotationsfläche zweiten Grades mit vertikaler Umdrehungsachse

$$A'(\xi^2+\eta^2) = B' + C'(\zeta + D')^2,$$

wo

$$A', B', C', D'$$

konstant sind, nur von n abhängen. Man findet für die Kurven (D_1) und (D_2):

$$A_1' = A_2' = \frac{16}{9}\frac{1}{n^2(1-n^2)}, \quad B_1' = B_2' = \frac{4}{(1-4n^2)^2},$$

$$C_1' = C_2' = -\frac{64}{9}\frac{n^2}{(1-n^2)^2\cdot(1-4n^2)}, \tag{24}$$

$$D_1' = -\frac{1-n^2}{2n}, \qquad D_2' = \frac{1+n^2}{2n}.$$

Die Schraubenlinien (D_1) und (D_2) liegen also auch auf kongruenten Rotationsflächen, von denen die eine nur gegen die andere um n längs der gemeinsamen Rotationsachse verschoben ist.

Die Striktionskurve (E) der Hauptnormalenfläche gehört der Rotationsfläche

$$A^* (x^2 + y^2) = B^* + C^* (z + D^*)^2$$

an, wo

$$(25) \qquad A^* = \frac{16}{9} \frac{1}{n^2(1-n^2)}, \quad B^* = \frac{4}{(1-4n^2)^2},$$

$$C^* = -\frac{64n^2}{(1-4n^2)(1-3n^2)^2}, \quad D^* = \frac{n}{2}.$$

(D_1), (D_2) und (E) sind die Schnittkurven der angegebenen Rotationsflächen mit einem Zylinder, dessen Orthogonalschnitt die natürliche Gleichung

$$(26) \qquad 4n^2 s_0^2 + \varrho_0^2 = \left(\frac{3n\sqrt{1-n^2}}{2}\right)^2$$

besitzt, also für $n < \frac{1}{2}$ eine Epizykloide und für $n > \frac{1}{2}$ eine Hypozykloide ist.

Falls $n < \frac{1}{2}$ ist, liegen nun die Kurve konstanter Krümmung und ihre Zugeordnete auf einschaligen Rotationshyperboloiden, während ihre rektifizierenden Schraubenlinien und die Striktionskurve ihrer gemeinschaftlichen Hauptnormalenfläche Rotationsellipsoiden angehören. Für $n > \frac{1}{2}$ dagegen gehören (M_1) und (M_2) Rotationsellipsoiden an; ihre rektifizierenden Gratlinien und die Kurve (E) aber liegen auf einschaligen Rotationshyperboloiden. Alle diese koaxialen Rotationsflächen sind symmetrisch inbezug auf eine Parallelebene zur xy Ebene durch den Mittelpunkt der Rotationsfläche, die (E) enthält. Interessant zu bemerken ist, daß letztere Fläche die Rotationsflächen, denen (M_1) und (D_1), bzw. (M_2) und (D_2), angehören und die sich längs des Parallelkreises

$$z = -\frac{1-n^2}{4n}, \quad \text{bzw. } z = \frac{1-5n^2}{4n},$$

berühren, in denselben Parallelkreisen schneidet.

Die Gestalt der Kurven (M_1) und (D_1) in diesen beiden Fällen $n > \frac{1}{2}$ und $n < \frac{1}{2}$ ist a. a. O. behandelt worden. Für die Gestalt der Zugeordneten und der Rückkehrkante ihrer rektifizierenden Fläche ergibt sich folgendes:

(M_2) hat für $$v = \frac{k}{n}\,\pi$$

Spitzen. Diese gehören dem Parallelkreis

$$z = -\frac{1-5n^2}{4n}$$

an und sind identisch mit den höchsten Punkten ihrer rektifizierenden Gratlinie, deren tiefste Punkte (Spitzen) auf dem Parallelkreis

$$z = -\frac{5-n^2}{4n}$$

liegen. Die Werte

$$v = \frac{2k+1}{2n}\,\pi$$

geben die tiefsten Punkte der Zugeordneten; diese liegen auf dem Parallelkreis

$$z = -\frac{1-5n^2}{4n}\,.$$

Wie (M_1) an den Stellen

$$v = \frac{k}{n}\,\pi\,,$$

so hat (M_2) für

$$v = \frac{2k+1}{2n}\,\pi$$

eine singuläre Berührungsebene.

Die Striktionskurve der Hauptnormalenfläche besitzt Spitzen in den Punkten

$$v = \frac{k}{2n}\,\pi\,;$$

diese liegen verteilt auf den Parallelkreisen

$$z = \frac{1-5n^2}{4n} \quad \text{und} \quad z = -\frac{1-n^2}{4n}\,,$$

d. s. die Parallelkreise, in denen sich die Rotationsflächen (13), (14) mit (24) berühren und in denen sie von der Rotationsfläche, auf der (E) liegt, geschnitten werden, und fallen mit den tiefsten Punkten von (M_1) [und (D_1)] und den höchsten Punkten von (M_2) [und (D_2)] zusammen.

(vgl. Tafel I. Fig. 1, Tafel II. Fig. 1.)

In der ganzen Untersuchung stellt die Annahme $n = \frac{1}{2}$ eine Ausnahme dar. In diesem Falle sind die Quadraturen nicht wie sonst ausführbar (vgl. a. a. O.). Für die Gleichungen der Kurve konstanter Krümmung (M_1) ergeben sich jetzt folgende Ausdrücke:

$$(27)\qquad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{3}{4}v + \sin v + \frac{1}{8}\sin 2v\right\}, \\ y_1 &= +\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\cos v + \frac{1}{8}\cos 2v\right\},\ z_1 = \frac{3}{8}\cos v, \end{aligned}$$

während die kartesischen Gleichungen von (M_2) jetzt

$$(28)\qquad \begin{aligned} x_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{3}{4}v - \sin v + \frac{1}{8}\sin 2v\right\}, \\ y_2 &= +\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-\cos v + \frac{1}{8}\cos 2v\right\}, z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\cos v - 1\right) \end{aligned}$$

und die der Striktionskurve (E)

$$(29)\qquad x^* = -\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(v - \sin 2v\right), y^* = -\frac{\sqrt{3}}{8}\left(1 + \frac{3}{4}\cos 2v\right),$$

$$z^* = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cos v - 1\right)$$

lauten. Diese Kurven sind transzendent; sie liegen nicht mehr auf Rotationsflächen zweiter Ordnung, sondern gehören parabolischen Zylindern an, deren Erzeugenden parallel zur x-Achse und deren Achsenebenen der xy-Ebene parallel sind, und zwar liegen (M_1) und (M_2) auf kongruenten parabolischen Zylindern, nämlich auf der Fläche

$$(30)\qquad \left(z + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{4\sqrt{3}}\left(y + \frac{9\sqrt{3}}{32}\right)$$

bzw.

$$(31)\qquad \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{4\sqrt{3}}\left(y + \frac{9\sqrt{3}}{32}\right),$$

während (E) dem parabolischen Zylinder

$$(32)\qquad \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{12\sqrt{3}}\left(y + \frac{\sqrt{3}}{32}\right)$$

angehört.

Die höchsten Punkte ($v = 2k\pi$) von (M_1) liegen auf der Parallelen $z = \frac{3}{8}$ zur x-Achse; ihre Spitzen [$v = (2k+1)\pi$] gehören der Parallelen $z = -\frac{3}{8}$ an und sind identisch mit den tiefsten Punkten von (E). Die tiefsten Punkte der Zugeordneten verteilen sich auf der Parallelen $z = -\frac{7}{8}$ zur x-Achse, während ihre Spitzen auf der Parallelen $z = -\frac{1}{8}$ liegen und mit den höchsten Punkten der Striktionslinie zusammenfallen. (M_1) und (M_2) bestehen aus lauter kongruenten Bögen, deren Spannweite (d. h. gemessen von Spitze zu Spitze) den Wert $\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$ hat.

(Vergl. Tafel III. Fig. 1.)

§ 2. Biegung dieser Hauptnormalenflächen in die Regelfläche mit Richtebene.

a) Kartesische Gleichungen der Biegungskurven.

Es ist klar, daß die Striktionskurve ($\bar{E}$) dieser Biegungsregelfläche wieder eine Geodätische ist. Da die Mittelebenen einer Regelfläche mit Richtebene einen Zylinder einhüllen, so ist auch ($\bar{E}$) wieder eine Schraubenlinie, ihre Steigung hat den Wert $tg\,\varepsilon$, und es leuchtet unmittelbar der Satz ein:

Der Winkel der ganzen Krümmung der Kurve ($\bar{E}$) ist gleich dem Kontingenzwinkel der Projektionen (P_1) und (P_2) der Biegungskurven von (M_1) und (M_2) auf die Richtebene.

Zur Bestimmung der kartesischen Gleichungen der Biegungskurven der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten hat man zwei Wege. Wir verfolgen nur den kürzeren: Man kann nämlich sofort die z-Koordinate aller Biegungskurven hinschreiben und unschwer die natürlichen Gleichungen von (P_1) und (P_2) ermitteln. Letztere ergeben sich folgendermaßen:

Aus II. (2) und (6) geht hervor

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_I}\left(\frac{ds_I}{ds_1}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mathfrak{r}_1^{\,2}} = \frac{1}{\varrho_I^{\,2}}\left(\frac{ds_I}{ds_1}\right)^2 .$$

Hieraus erhält man für ϱ_I und ds_I

$$\varrho_I = \left(\frac{ds_I}{ds_1}\right)^2 = \mathfrak{r}_1^{\,2} = \cos^2 nv, \tag{33}$$

woraus folgt

$$ds_I = \sqrt{1-n^2}\,\cos^2 nv\,dv,\quad d\tau_I = \sqrt{1-n^2}\,dv\ .$$

In diesen beiden Gleichungen steckt implizit die natürliche Gleichung von (P_1). Für die kartesischen Gleichungen dieser Kurve[1]) findet man also, da die Integrationskonstanten gleich Null gesetzt werden können,

$$x_I = \sqrt{1-n^2}\int \cos^2 nv\,\cos v\sqrt{1-n^2}\,dv\ , \tag{34}$$

$$y_I = \sqrt{1-n^2}\int \cos^2 nv\sin v\sqrt{1-n^2}\,dv\ ,$$

oder in endlicher Form

$$x_I = +\frac{1}{2}\sin v\sqrt{1-n^2}\left(1+\cos 2nv\right)$$

$$+\frac{n}{2}\left\{\frac{\sin\left(2n-\sqrt{1-n^2}\right)v}{2n-\sqrt{1-n^2}} - \frac{\sin\left(2n+\sqrt{1-n^2}\right)v}{2n+\sqrt{1-n^2}}\right\}, \tag{34a}$$

$$y_I = -\frac{1}{2}\cos v\sqrt{1-n^2}\left(1+\cos 2nv\right)$$

$$+\frac{n}{2}\left\{\frac{\cos\left(2n-\sqrt{1-n^2}\right)v}{2n-\sqrt{1-n^2}} - \frac{\cos\left(2n+\sqrt{1-n^2}\right)v}{2n+\sqrt{1-n^2}}\right\}.$$

Nun ist die Projektion (E_0) von (E) die Evolute der Kurve (P_1). Die natürlichen Bestimmungsstücke dieser Krümmungsmittelpunktskurve ergeben sich also zu

$$\varrho_0 = -\frac{n}{\sqrt{1-n^2}}\sin 2nv,\quad \frac{d\varrho_0}{d\tau_0} = -\frac{2n^2}{1-n^2}\cos 2nv\,, \tag{35}$$

wo

$$d\tau_0 = d\tau_I$$

---

[1]) G. Scheffers, Theorie der Kurven. 1910. S. 42.

ist. Hieraus erhält man für die kartesischen Gleichungen von (E_0)[1]:

$$(36)\qquad \begin{aligned} x_0 &= -n\int \sin 2nv \cos\left(v\sqrt{1-n^2}+\frac{\pi}{2}\right)dv,\\ y_0 &= -n\int \sin 2nv \sin\left(v\sqrt{1-n^2}+\frac{\pi}{2}\right)dv \end{aligned}$$

oder nach Ausführung der Quadraturen:

$$(36a)\qquad \begin{aligned} x_0 &= \frac{n}{2}\left\{\frac{\sin(2n-\sqrt{1-n^2})\,v}{2n-\sqrt{1-n^2}} - \frac{\sin(2n+\sqrt{1-n^2})\,v}{2n+\sqrt{1-n^2}}\right\},\\ y_0 &= \frac{n}{2}\left\{\frac{\cos(2n-\sqrt{1-n^2})\,v}{2n-\sqrt{1-n^2}} + \frac{\cos(2n+\sqrt{1-n^2})\,v}{2n+\sqrt{1-n^2}}\right\}. \end{aligned}$$

Bedenkt man, daß (P_2) eine Parallelkurve zu (P_1) ist:

$$x_{II} = x_I + \varrho_1 \cdot l_I, \qquad y_{II} = y_I + \varrho_1 \cdot m_I,$$

so bekommt man

$$(37)\qquad \begin{aligned} x_{II} &= \frac{1}{2}\left(1-\cos 2nv\right)\sin v\sqrt{1-n^2}\\ &+\frac{n}{2}\left\{\frac{\sin(2n-\sqrt{1-n^2})\,v}{2n-\sqrt{1-n^2}} - \frac{\sin(2n+\sqrt{1-n^2})\,v}{2n+\sqrt{1-n^2}}\right\},\\ y_{II} &= \frac{1}{2}\left(\cos 2nv-1\right)\cos v\sqrt{1-n^2}\\ &+\frac{n}{2}\left\{\frac{\cos(2n-\sqrt{1-n^2})\,v}{2n-\sqrt{1-n^2}} + \frac{\cos(2n+\sqrt{1-n^2})\,v}{2n+\sqrt{1-n^2}}\right\}, \end{aligned}$$

Ausdrücke, die sich nach Ausführung der Quadraturen auch aus den natürlichen Gleichungen

$$d\tau_I = d\tau_{II} \text{ und } \varrho_{II} = \varrho_1 - \varrho_I$$

dieser Kurve ergeben.

Fügt man zu den drei Gleichungspaaren (34a), (36a), (37) noch hinzu

---

[1]) a. a. O. S. 62 u. f. S. 92 u. f.

(38) $$\bar{z} = \frac{1}{2}\sqrt{1-n^2}\int \sin 2\,nv\,dv,$$

oder in endlicher Form

(38a) $$\bar{z} = -\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}\cos 2nv\ ,$$

so hat man die kartesischen Gleichungen der betreffenden Biegungskurven. Wenn noch einige Umformungen vorgenommen werden, bekommt man für die kartesischen Gleichungen der Biegungskurve der Kurve konstanter Krümmung:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{5n^2-1}\left\{\frac{1}{2}\left[(5n^2-1)-(1-n^2)\cos 2nv\right]\sin v\sqrt{1-n^2}\right.$$
$$\left. + n\sqrt{1-n^2}\,\sin 2nv\cos v\sqrt{1-n^2}\right\},$$

(39) $$\bar{y}_1 = \frac{1}{5n^2-1}\left\{\frac{1}{2}\left[(1-5n^2)+(1-n^2)\cos 2nv\right]\cos v\sqrt{1-n^2}\right.$$
$$\left. + n\sqrt{1-n^2}\,\sin 2nv\,\sin v\sqrt{1-n^2}\right\},$$

$$\bar{z}_1 = -\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}\cos 2n\,v,$$

der Zugeordneten

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{5n^2-1}\left\{\frac{1}{2}\left[(1-5n^2)-(1-n^2)\cos 2nv\right]\sin v\sqrt{1-n^2}\right.$$
$$\left. + n\sqrt{1-n^2}\,\sin 2nv\cos v\sqrt{1-n^2}\right\},$$

(40) $$\bar{y}_2 = \frac{1}{5n^2-1}\left\{\frac{1}{2}\left[(5n^2-1)+(1-n^2)\cos 2\,nv\right]\cos v\sqrt{1-n^2}\right.$$
$$\left. + n\sqrt{1-n^2}\,\sin 2\,nv\,\sin v\sqrt{1-n^2}\right\},$$

$$\bar{z}_2 = -\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}\cos 2n\,v,$$

der Striktionskurve der Biegungsregelfläche:

$$\bar{x}^* = \frac{n}{5n^2-1}\left\{\sqrt{1-n^2}\,\sin 2nv\cos v\sqrt{1-n^2} - 2n\cos 2nv\sin v\sqrt{1-n^2}\right\},$$

$$\bar{y}^* = \frac{n}{5n^2-1}\left\{\sqrt{1-n^2}\,\sin 2nv\sin v\sqrt{1-n^2} + 2n\cos 2nv\cos v\sqrt{1-n^2}\right\}, \tag{41}$$

$$\bar{z}^* = -\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}\cos 2nv\,.$$

Um die Gleichungen der Biegungskurve der Zugeordneten und der Striktionslinie der Biegungsregelfläche zu ermitteln, hätte man auch so verfahren können: Sobald man die Gleichungen der Kurve $(\bar{M}_1)$ und die Richtungskosinus der Erzeugenden der Biegungsregelfläche kennt, kann man die Gleichungen letzterer aufstellen. Diese lauten:

$$\bar{X} = \frac{1}{5n^2-1}\left\{\frac{1}{2}\left[(1-n^2)\cos 2nv+(1+3n^2)+2(1-5n^2)t\right]\sin v\sqrt{1-n^2} + n\sqrt{1-n^2}\,\sin 2nv\cos v\sqrt{1-n^2}\right\},$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{5n^2-1}\left\{\frac{1}{2}\left[(n^2-1)\cos 2nv-(1+3n^2)+2(5n^2-1)t\right]\cos v\sqrt{1-n^2} + n\sqrt{1-n^2}\,\sin 2nv\sin v\sqrt{1-n^2}\right\}, \tag{42}$$

$$\bar{Z} = -\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}\cos 2nv\,.$$

Dem Parameterwert $t = 1$ entspricht dann die Kurve $(\bar{M}_2)$, dem Werte $t = \cos^2 nv$ die Striktionskurve der Biegungsregelfläche.

Der zweite Weg soll nur kurz angedeutet werden. Nach den Formeln II. (24) bis (27) erhält man für die Krümmung und Torsion der Kurve

$$(\bar{M}_1) \quad \frac{1}{\varrho_1} = \frac{\sqrt{n^2 tg^2 nv + 1}}{\sqrt{1-n^2}}, \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{tgnv(2n^2 tg^2 nv + n^2 + 1)}{n^2 tg^2 nv + 1},$$

$$(43)$$

$$(\bar{M}_2) \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\sqrt{n^2 cotg^2 nv + 1}}{\sqrt{1-n^2}}, \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{cotgnv(2n^2 cotg^2 nv + n^2 + 1)}{n^2 cotg^2 nv + 1}.$$

$$(44)$$

Diese beiden Gleichungspaare stellen die natürlichen Gleichungen jener Raumkurven implizit dar, und man kann mit Hilfe der allgemeinen Theorie zu ihren kartesischen Gleichungen gelangen.[1])

b) Eigenschaften der Biegungskurven.

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen der Kurven $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$ drücken sich folgendermaßen aus:

von $(\bar{M}_1)$

$$\bar{l}_1 = -\frac{n\,tg\,nv\cos v\sqrt{1-n^2} + \sqrt{1-n^2}\,\sin v\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{n^2 tg^2 nv + 1}},$$

$$(45) \qquad \bar{m}_1 = -\frac{n\,tg\,nv\sin v\sqrt{1-n^2} - \sqrt{1-n^2}\cos v\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{n^2 tg^2 nv + 1}},$$

$$\bar{n}_1 = \frac{n}{\sqrt{n^2 tg^2 nv + 1}},$$

von $(\bar{M}_2)$

$$\bar{l}_2 = -\frac{n\,cotg\,nv\cos v\sqrt{1-n^2} + \sqrt{1-n^2}\,\sin v\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{n^2 cotg^2 nv + 1}},$$

$$(46) \qquad \bar{m}_2 = -\frac{n\,cotg\,nv\sin v\sqrt{1-n^2} - \sqrt{1-n^2}\cos v\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{n^2 cotg^2 nv + 1}},$$

$$\bar{n}_2 = -\frac{n}{\sqrt{n^2 cotg^2 nv + 1}}.$$

Die Hauptnormalen dieser Biegungskurven bilden also nicht mehr mit einer im Raume festen Richtung denselben Winkel. Es könnte sich nämlich die Frage erheben, ob die Biegungskurven der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten wieder auf Böschungsflächen geodätisch sind. Dies ist also offenbar nicht der Fall.

Aber die Biegungskurven der Kurven (M_1) und (M_2) gehören

---

[1]) Vgl. G. Scheffers, Theorie der Kurven. 1910. S. 290 u. f.

wieder Rotationsflächen zweiter Ordnung mit vertikaler Umdrehungsachse an; es liegt $(\bar{M}_1)$ auf der Fläche

$$\bar{A}_1 (x^2 + y^2) = \bar{B}_1 + \bar{C}_1 (z + \bar{D}_1)^2 , \tag{47}$$

$(\bar{M}_2)$ auf

$$\bar{A}_2 (x^2 + y^2) = \bar{B}_2 + \bar{C}_2 (z + \bar{D}_2)^2 , \tag{48}$$

und es ist

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = (5n^2 - 1)^2, \quad \bar{B}_1 = \bar{B}_2 = 4n^4, \quad \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = -4n^2 (5n^2 - 1),$$

während

$$\bar{D}_1 = -\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}$$

und

$$\bar{D}_2 = +\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}$$

ist.

Für die Krümmung und Torsion der Striktionskurve $(\bar{E})$ findet man

$$\frac{1}{\bar{\varrho}^*} = \frac{4n\sqrt{1-n^2}}{3n^2+1} \frac{1}{\sin 2nv} , \qquad \frac{1}{\bar{r}^*} = \frac{2(1-n^2)}{3n^2+1} \frac{1}{\sin 2nv} . \tag{49}$$

Aus den natürlichen Gleichungen dieser Kurve

$$\frac{\bar{r}^*}{\bar{\varrho}^*} = 2 \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} = 2m , \quad (3n^2+1)\bar{s}^{*2} + (1-n^2)\bar{\varrho}^{*2} = \left(\frac{3n^2+1}{4n}\right)^2 \tag{50}$$

folgt, daß die Kurve eine Kurve konstanter Steigung auf einer Rotationsfläche zweiter Ordnung ist. Für diese ergibt sich

$$\bar{A}^* (x^2 + y^2) = \bar{B}^* + \bar{C}^* (z + \bar{D}^*)^2 , \tag{51}$$

wo

$$\bar{A}^* = \left(\frac{5n^2-1}{n^2}\right)^2, \quad \bar{B}^* = 1-n^2 , \quad \bar{C}^* = \frac{16n^2(5n^2-1)}{1-n^2} , \quad \bar{D}^* = 0$$

ist.

Die Kurven $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$ liegen auf kongruenten Rotationsflächen; die Mittelpunkte der Flächen (47) und (48) sind auf der z-Achse symmetrisch zum Anfangspunkte, dem Mittelpunkt der Rotationsfläche, der $(\bar{E})$ angehört. Alle drei koaxialen Rotationsflächen sind symmetrisch inbezug auf die xy-Ebene. Gehören, was für $n^2 < \frac{1}{5}$ eintritt, die Kurven

$(\overline{M}_1)$ und $(\overline{M}_2)$ einschaligen Rotationshyperboloiden an, so liegt $(\overline{E})$ auf einem Rotationsellipsoid. Im Falle $n^2 > \frac{1}{5}$ liegen die Biegungskurven der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten auf Rotationsellipsoiden, während die Striktionskurve der Biegungsregelfläche einem einschaligen Rotationshyperboloid angehört.

Zu beachten ist ferner: Der Orthogonalschnitt des zu der Schraubenlinie $(\bar{E})$ gehörigen Zylinders hat die natürliche Gleichung

$$4m^2 s_0^2 + \varrho_0^2 = m^2 ,$$

ist also eine Epizykloide, falls

$$m < \frac{1}{2} \text{ d. h. } n^2 < \frac{1}{5} ,$$

eine Hypozykloide, falls

$$m > \frac{1}{2} \text{ d. h. } n^2 > \frac{1}{5} .$$

Der Radius des festen Kreises dieser Kurven ist

$$R_0 = \frac{2n^2}{1-5n^2} ;$$

der Modul

$$\frac{r_0}{R_0} = \frac{1-2n}{4n}$$

hat genau denselben Wert wie der des Orthogonalschnitts des Zylinders, auf dem (E) lag.

Die drei oben beschriebenen Rotationsflächen schneiden sich in den Parallelkreisen

$$z = \pm \frac{\sqrt{1-n^2}}{4n} ,$$

deren Radien gleich R_0 sind.

c) Gestalt der Biegungskurven.

Die Striktionskurve der Biegungsregelfläche besitzt Spitzen für

$$v = \frac{k}{2n} \pi ;$$

diese verteilen sich auf die Parallelkreise

$$z = -\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}\left(v = \frac{k}{n}\pi\right)$$

und

$$z = +\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}\left(v = \frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

$(\bar{E})$ ist der Schnitt eines Zylinders, dessen Basis eine Epi- oder Hypozykloide ist, mit der Rotationsfläche (51).

$(\bar{M}_1)$ hat für

$$v = \frac{2k+1}{2n}\pi$$

Spitzen, und die Werte

$$v = \frac{k}{n}\pi$$

geben ihre tiefsten Punkte. Erstere liegen auf dem Parallelkreis

$$z = +\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}$$

und fallen mit den Spitzen von $(\bar{E})$ zusammen, die tiefsten Punkte auf dem Parallelkreise

$$z = -\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}.$$

Die Biegungskurve der Zugeordneten besitzt Spitzen

$$\left(v = \frac{k}{n}\pi\right)$$

auf dem Parallelkreise

$$z = -\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}$$

und erreicht ihre höchsten Punkte

$$\left(v = \frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

auf dem Parallelkreis

$$z = +\frac{\sqrt{1-n^2}}{4n}.$$

Die Spitzen dieser Kurve sind identisch mit den tiefsten Punkten von $(\bar{E})$.

Die Kurven $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$ haben singuläre Tangentialebenen in den Punkten

$$v = \frac{k}{n}\pi$$

bzw.

$$v = \frac{2k+1}{2n}\pi \quad .$$

Beachtenswert ist, daß die höchsten Punkte von (M_1), bzw. tiefsten Punkte von (M_2), sich nach der Biegung vorfinden als tiefste Punkte von $(\bar{M}_1)$, bzw. höchste Punkte von $(\bar{M}_2)$.

(vgl. Tafel I. Fig. 2, Tafel II. Fig. 2.)

Eine Ausnahme von diesen Betrachtungen bietet der Fall

$$n^2 = \frac{1}{5}$$

dar. Die Gleichungen, die man für die Biegungskurven erhalten hat, definieren nur dann in eindeutiger Weise eine Kurve, falls

$$n^2 \gtrless \frac{1}{5}$$

ist. Um auch für

$$n^2 = \frac{1}{5}$$

eine Lösung herbeizuführen, muß man auf die Integrale zurückgehen, aus denen sich jene Ausdrücke herleiteten. Es genügt, dies bei einer der Biegungskurven, etwa $(\bar{M}_1)$, vorzunehmen.

Für

$$n^2 = \frac{1}{5}$$

lauten danach die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Biegungskurve der Kurve konstanter Krümmung

$$\bar{x}_1 = 2\sqrt{\frac{1}{5}}\int \cos^2 v \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \cos 2v \sqrt{\frac{1}{5}}\, dv \,,$$

(52)

$$\bar{y}_1 = 2\sqrt{\frac{1}{5}}\int \cos^2 v \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sin 2v \sqrt{\frac{1}{5}}\, dv$$

und, da sich die Ausnahme nicht auf die z-Koordinate erstreckt,

$$\bar{z}_1 = -\cos^2 v \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} .$$

Nach Ausführung der Quadraturen bekommt man jetzt

$$\bar{x}_1 = \cos^3 v \sqrt{\frac{1}{5}} . \sin v \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} \cos v \sqrt{\frac{1}{5}} . \sin v \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1}{5}},$$

(52a)

$$\bar{y}_1 = -\cos^4 v \sqrt{\frac{1}{5}} , \qquad \bar{z}_1 = -\cos^2 v \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} .$$

Für die kartesischen Gleichungen von $(\bar{M}_2)$ ergeben sich:

$$\bar{x}_2 = \cos^3 v \sqrt{\frac{1}{5}} . \sin v \sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{3}{2} \cos v \sqrt{\frac{1}{5}} . \sin v \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1}{5}},$$

(53)

$$\bar{y}_2 = -\cos^4 v \sqrt{\frac{1}{5}} + 2\cos^2 v \sqrt{\frac{1}{5}} - 1 , \; \bar{z}_2 = -\cos^2 v \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2},$$

und die von $(\bar{E})$

$$\bar{x}^* = -\cos^3 v \sqrt{\frac{1}{5}} . \sin v \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} \cos v \sqrt{\frac{1}{5}} . \sin v \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1}{5}},$$

(54)

$$\bar{y}^* = \cos^4 v \sqrt{\frac{1}{5}} - \cos^2 v \sqrt{\frac{1}{5}} , \qquad \bar{z}^* = -\cos^2 v \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2} .$$

Ein Blick auf diese drei Gleichungstripel lehrt, daß man es mit keinen algebraischen Kurven mehr zu tun hat. Die Kurven $(\bar{M}_1)$, $(\bar{M}_2)$ und $(\bar{E})$ liegen auch nicht mehr auf Rotationsflächen zweiter Ordnung, sondern auf parabolischen Zylindern, deren erzeugende Geraden der x-Achse und deren Achsenebenen der xy-Ebene parallel sind. Es gehören $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$ den kongruenten parabolischen Zylindern

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -y$$

und

$$\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -y .$$

an, während die Striktionskurve auf der Fläche

$$z^2 = y + \frac{1}{4}$$

liegt.

Die tiefsten Punkte von $(\overline{M}_1)$ verteilen sich auf die Parallele

$$z = -\frac{1}{2}$$

zur x-Achse und die höchsten Punkte von $(\overline{M}_2)$ auf die Parallele

$$z = +\frac{1}{2}$$

zur x-Achse. Auf der letzteren liegen auch die Spitzen von $(\overline{M}_1)$ und die mit ihnen zusammenfallenden von $(\overline{E})$; die Spitzen von $(\overline{M}_2)$ gehören der ersteren an und sind identisch mit den tiefsten Punkten von $(\overline{E})$. $(\overline{M}_1)$ und $(\overline{M}_2)$ bestehen aus lauter kongruenten Kurvenbögen mit der Spannweite $\frac{\pi}{2}$.

(vgl. Tafel III. Fig. 2.)

§ 3. Weitere Biegungsflächen dieser Hauptnormalenflächen.

a) Biegung der Hauptnormalenfläche in die Hauptnormalenfläche einer Orthogonaltrajektorie $t_0 = C$.

Was hier interessiert, ist der explizite Ausdruck für die Bogenlänge der Orthogonaltrajektorie. Nach II. (46) ergibt sich für diese

$$(55) \qquad ds = \sqrt{1-n^2}\,.\,\cos nv\,.\,\sqrt{1-2t_0+\frac{t_0^2}{\cos^2 nv}}\;dv$$

oder

$$(56) \qquad s = \frac{\sqrt{1-n^2}}{n}\,(1-t_0)\int \frac{1-\varkappa^2 \sin^2 u}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 u}}\;du\,,$$

wo

$$\varkappa^2 = \frac{1-2t_0}{(1-t_0)^2} \quad \text{und} \quad u = nv$$

gesetzt ist. Für alle Werte

$$0 < \varkappa^2 < 1$$

oder $$\frac{1}{2} > t_0 > -\infty$$

ist dadurch s ausgedrückt mit Hilfe eines elliptischen Integrals der zweiten Gattung.

b) Biegung der Hauptnormalenfläche derart, daß (M_1) eben wird.

Auf Grund der Formeln II. (50), (51) folgt: Die ebene Biegungskurve der Kurven konstanter Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = 1 \ ,$$

die auf Böschungsflächen geodätisch sind, besitzt die natürliche Gleichung

(57) $$\varrho_0 = \cos \frac{\sqrt{1 - n^2(1 + s_0^2)}}{n} \ .$$

Ueber die Gestalt dieser Kurve kann man folgendes aussagen: Die Kurve ist symmetrisch zur Anfangslage $s_0 = 0$. Um ihre Form, die von n abhängt, näher zu untersuchen, muß man die verallgemeinerten Mannheimschen Kurven[1]) heranziehen. Setzt man

$$m = \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}} \ ,$$

so hat die Mannheimsche Kurve dieser ebenen Kurve im Intervall

$$x = \pm \frac{1}{m}$$

die kartesische Gleichung

(58) $$y = \cos \sqrt{\frac{1}{m^2} - x^2} \ ,$$

in den Intervallen von

$$-\infty \text{ bis } -\frac{1}{m}$$

und von

$$\frac{1}{m} \text{ bis } +\infty$$

dagegen

(59) $$y = \mathfrak{Cof} \sqrt{x^2 - \frac{1}{m^2}} \ ;$$

[1]) H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven. 1908. S. 322.

sie ist also im Intervall

$$\left(-\frac{1}{m}, \quad \frac{1}{m}\right)$$

eine sinuslinienartige Kurve, eine Sinuslinie, deren Bögen in verschiedenem Maße, um so mehr, je näher man dem Werte $x = 0$ kommt, auseinandergezogen sind, und hat außerhalb dieses Intervalls eine exponentialkurvenähnliche Gestalt. Die Endpunkte des Intervalls

$$\left(-\frac{1}{m}, +\frac{1}{m}\right)$$

ergeben Wendepunkte mit horizontaler Tangente.

(vgl. Tafel IV. Fig. 1.)

An dieser Stelle sei auf eine geometrische Erzeugungsweise der betrachteten Kurve hingewiesen: Man denke sich einen geraden Kreiszylinder vom Radius b

$$x = b \cos \frac{s_0}{b}, \quad y = b \sin \frac{s_0}{b}, \tag{60}$$

wo s_0 die Bogenlänge der Grundkurve bedeutet, und auf ihm einen geodätischen Kreis

$$z^2 + s_0^2 = a^2 . \tag{61}$$

Dann projiziert sich diese Kurve auf die xz-Ebene in eine Kurve

$$x = b \cos \frac{1}{b} \sqrt{a^2 - z^2} .$$

Hierbei wird aber offenbar nicht die ganze analytische Kurve mit ihren sich ins Unendliche erstreckenden Aesten herauskommen, sondern nur das Stück, das durch

$$|z| < a$$

gegeben wird.

Die Kurve

$$\varrho_0 = \cos \sqrt{\frac{1}{m^2} - s_0^2}$$

erhält man aus der Mannheimschen Kurve durch punktweise Konstruktion mit Hilfe des Krümmungskreises.

(vgl. Tafel IV. Fig. 2.)

c) Biegung der Hauptnormalenfläche in eine Regelfläche mit ebener Striktionskurve.

Nach II. (60) und (61) wird

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{1+3n^2}{1-n^2}\, sin^2\, n\, v$$

und

$$cos\, \varphi = -\frac{2n}{\sqrt{1+3n^2}} = const\ .$$

Es wird $\varrho = 0$. Die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche ist eine Gerade.

Die Differentialgleichung für $cos\, \psi$ lautet

$$(62) \qquad \frac{d\ cos\ \psi}{ds} \pm \frac{\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{1-n^2(1+s^2)}} \sqrt{1-\frac{1+3n^2}{1-n^2} cos^2\, \psi} = O\ ,$$

woraus hervorgeht, falls man eine bestimmte Richtung auf jener Geraden festlegt und die Integrationskonstante gleich Null setzt:

$$(62a) \qquad cos\ \psi = \frac{\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{1+3n^2}}\, sin\left\{\frac{\sqrt{1+3n^2}}{n}\, arc\, sin\left(\frac{n}{\sqrt{1-n^2}}\, s\right)\right\}.$$

Die Geraden der verbogenen Fläche bilden also mit einer festen Ebene einen Winkel, dessen Cosinus sich für diesen speziellen Fall in obiger Weise mit der Bogenlänge ändert.

Durch die Werte für $cos\, \varphi$ und $cos\, \psi$ sind die Erzeugenden der Biegungsregelfläche dann für diese besondere Biegung vollständig bestimmt.

Dies wäre die eine Biegung, bei der die Striktionskurve eben wird.

Bei der zweiten Biegung kommt man auf Flächen, die zyklische Kurven:

$$A\, \varrho^2 + Bs^2 = 1$$

als Striktionslinie haben.

§ 4. Die Regelflächen mit orthogonaler Striktion.

Man hat gesehen: Die Regelflächen der vorliegenden Flächenklasse mit geodätischer (isogonaler) Striktion sind die Biegungsregelflächen der Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung, die auf Böschungsflächen geodätisch sind.

Fragt man noch spezieller nach den Regelflächen mit orthogonaler Striktion, welche natürlich zugleich geodätisch ist, so gelangt man,

wegen $\mathfrak{r}^2 = k \cdot \varrho$ [1]), zu den Biegungsregelflächen der Hauptnormalenflächen der gemeinen Schraubenlinien, d. s. die Binormalenflächen der Kurven konstanter Torsion.

a) Die Wendelfläche. [2])

„Die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer Wendelfläche sind gewöhnliche Schraubenlinien."

Jedes beliebige Paar von Orthogonaltrajektorien der Wendelfläche ist ein isogonales Kurvenpaar mit proportionalen Bogenelementen.

Zu jeder Orthogonaltrajektorie t_1 der Erzeugenden ergibt sich aus der Relation

$$1 - \frac{t_1 + t_2}{\varrho} + \frac{t_1 \cdot t_2}{\mathfrak{r}^2} = 0 \tag{63}$$

die Orthogonaltrajektorie t_2, die mit der ersteren ein orthogonales Kurvenpaar bildet, dessen Bogenelemente zugleich in konstantem Verhältnis stehen.

Die Schnittkurven der Wendelfläche mit Kreiszylindern von derselben Achse sind isometrische Kurvenpaare.

Die Hauptnormalenfläche der gemeinen Schraubenlinie stellt also einen ganz speziellen Fall dar.

Allgemein hat man: Die Bedingung für das Auftreten

1) von orthogonalen Kurvenpaaren auf der Hauptnormalenfläche einer beliebigen Raumkurve ist

$$1 - \frac{t_1 + t_2}{\varrho} + \frac{t_1 t_2}{\mathfrak{r}^2} = 0 .$$

Hieraus ergeben sich die gemeinen Schraubenlinien und die Raumkurven konstanter Krümmung.

2) von Kurvenpaaren mit proportionalen Bogenelementen

$$\left(\frac{ds_1}{ds_2}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{t_1}{\varrho_1}\cos\omega_1\right)^2 + t_1^2\left(\frac{1}{r_1} - \omega_1'\right)^2}{\left(1 - \frac{t_2}{\varrho_2}\cos\omega_2\right)^2 + t_2^2\left(\frac{1}{r_2} - \omega_2'\right)^2} = \lambda^2 . \tag{64}$$ [2])

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 101.

[2]) a. a. O. S. 112.

Hieraus folgen:

Die Normalenflächen der gewöhnlichen Schraubenlinie;

Die Hauptnormalenflächen der Kurven konstanter Krümmung

$$\left(\lambda = \frac{t_1}{t_2}\right) .$$

3) von isometrischen Kurvenpaaren

$$\lambda = 1 .$$

Man erhält die Hauptnormalenflächen der gemeinen Schraubenlinie:

$$t_1 = O \text{ und } t_2 = 2\,\frac{\mathfrak{r}^2}{\varrho} ,$$

oder allgemein: die Binormalenflächen der Kurven konstanter Torsion.

b) Binormalenflächen von Kurven konstanter Torsion.

Bei der Hauptnormalenfläche der gemeinen Schraubenlinie kann von einer Biegung in die Regelfläche mit Richtebene nicht die Rede sein, denn die Erzeugenden der Wendelfläche sind bereits alle einer Ebene parallel.

Von einer Biegung in eine Regelfläche mit ebener Striktion muß ebenfalls abgesehen werden. Die Striktionskurve der Wendelfläche ist ja eben, eine Gerade. Die Anwendung der Formeln ist aber insofern interessant, als sich aus ihnen das Gesetz ergibt, nach dem sich der Winkel, den die Erzeugenden mit einer im Raume festen Ebene bilden, ändert. Für den Winkel, den die Hauptnormalen der gewöhnlichen Schraubenlinie mit einer festen durch die Achse ihres Zylinders gelegten Ebene einschließen, gilt

(65) $$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{\mathfrak{r}} \quad \text{bzw.} \quad \chi = \frac{s}{\mathfrak{r}} ,$$

wobei $\mathfrak{r}$ der Radius der ganzen Krümmung der gemeinen Schraubenlinie ist.

φ ist konstant, gleich $\frac{\pi}{2}$; was ja sofort klar ist. Man hat

mithin

$$d\chi = \frac{1}{\mathfrak{r}}\, ds \ .$$

Die Aenderung des Winkels χ ist proportional der Aenderung der Bogenlänge.

Biegt man jedoch die Hauptnormalenfläche einer gegebenen gewöhnlichen Schraubenlinie derart, daß diese Kurve eben wird, so erhält man für ihre natürliche Gleichung

(66)
$$\varrho_0 = \varrho \ . \ cos \frac{s}{r} \ .$$

Diese Gleichung hat die Form

$$\varrho = k \ cos \ m\, s \ .^{1})$$

Um die Gestalt dieser Kurve zu finden, muß man wieder seine Zuflucht zu den verallgemeinerten Mannheimschen Kurven[2]) nehmen. Die verallgemeinerte Mannheimsche Kurve obiger Kurve ist die Sinuslinie. Die ebene Biegungskurve der gemeinen Schraubenlinie bekommt man danach als eine Kurve, die aus einer unendlichen Anzahl von lauter symmetrischen und kongruenten Kurvenbögen besteht. An den Stellen

$$s = \frac{2\,\varkappa + 1}{2\,m}\,\pi$$

besitzt die Kurve asymptotische Punkte.

(vgl. Tafel IV. Fig. 3.)

Ihre kartesischen Gleichungen drücken sich wie folgt aus:

$$x_0 = \int cos \left[\frac{r}{\varrho}\, lg\ tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{s}{2r} \right) \right] ds \ ,$$

$$y_0 = \int sin \left[\frac{r}{\varrho}\, lg\ tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{s}{2r} \right) \right] ds \ .$$

---

[1]) k und m sind beliebige Konstanten.

[2]) H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven. 1908. S. 322.

Anhang.

Es ist von Interesse, einmal die für die Kurven konstanter Krümmung auf den Rotationsflächen zweiter Ordnung in den Fällen

$$n \lessgtr \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad n^2 \lessgtr \frac{1}{5}$$

gewonnenen Ergebnisse auf bestimmte Zahlenbeispiele anzuwenden.

I. $n = \frac{2}{5}$. Tafel I.

In diesem Falle ist die Leitkurve des Zylinders, auf dem die rektifizierenden Schraubenlinien (D_1) und (D_2) der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten liegen, die achtspitzige Epizykloide. Diese beiden Schraubenlinien gehören ferner den Rotationsellipsoiden an

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{1}{3}\sqrt{21}\right)^2} + \frac{\left(z - \frac{21}{20}\right)^2}{\left(\frac{21}{8}\right)^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{1}{3}\sqrt{21}\right)^2} + \frac{\left(z + \frac{29}{20}\right)^2}{\left(\frac{21}{8}\right)^2} = 1.$$

Die Kurve konstanter Krümmung (M_1) und ihre Zugeordnete (M_2) liegen auf einschaligen Rotationshyperboloiden mit den Gleichungen

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{2}{9}\sqrt{27}\right)^2} - \frac{\left(z + \frac{33}{40}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\sqrt{27}\right)^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{2}{9}\sqrt{27}\right)^2} - \frac{\left(z - \frac{17}{40}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\sqrt{27}\right)^2} = 1.$$

Die Striktionskurve (E) der Hauptnormalenfläche ist eine Schraubenlinie auf dem Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{1}{3}\sqrt{21}\right)^2} + \frac{\left(z+\frac{1}{5}\right)^2}{\left(\frac{13}{24}\right)^2} = 1 .$$

Die höchsten Punkte der Kurve konstanter Krümmung liegen auf dem Parallelkreis

$$z = \frac{21}{40} ;$$

ihre tiefsten Punkte gehören dem Parallelkreis

$$z = -\frac{21}{40}$$

an und fallen mit den tiefsten Punkten ihrer rektifizierenden Gratlinie zusammen.

Die tiefsten Punkte von (M_2) gehören dem Parallelkreis

$$z = -\frac{37}{40}$$

an, ihre höchsten Punkte liegen auf dem Parallelkreis

$$z = \frac{1}{8}$$

und sind identisch mit den dort liegenden Spitzen ihrer rektifizierenden Schraubenlinie und den höchsten Punkten der Striktionskurve der Hauptnormalenfläche. Die höchsten Punkte (Spitzen) der rektifizierenden Gratlinie von (M_1) gehören dem Parallelkreis

$$z = \frac{21}{8}$$

an, während die tiefsten Punkte (Spitzen) der rektifizierenden Schraubenlinie von (M_2) auf den Parallelkreis

$$z = -\frac{121}{40}$$

fallen.

Die Biegungskurven $(\overline{M}_1)$ und $(\overline{M}_2)$ der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten, falls man die Hauptnormalenfläche der Kurve konstanter Krümmung in eine Regelfläche mit Richtebene verbiegt, liegen auf den einschaligen Rotationshyperboloiden

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{8}{5}\right)^2} - \frac{\left(z-\frac{1}{8}\sqrt{21}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2+y^2}{\left(\frac{8}{5}\right)^2} - \frac{\left(z+\frac{1}{8}\sqrt{21}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2} = 1.$$

Die Striktionskurve $(\bar{E})$ der Biegungsregelfläche mit Richtebene ist eine Schraubenlinie auf dem Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{2}{5}\sqrt{21}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{21}{40}\sqrt{5}\right)^2} = 1 \ .$$

Die höchsten und tiefsten Punkte dieser drei Kurven liegen verteilt auf den Parallelkreisen

$$z = \frac{1}{8}\sqrt{21} \quad \text{und} \quad z = -\frac{1}{8}\sqrt{21} \ ,$$

in denen die Rotationsfläche, auf der $(\bar{E})$ liegt, die, denen $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$ angehören, schneidet. Die Spitzen von $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$ fallen mit den Spitzen der Striktionskurve zusammen.

II. $n = \frac{3}{4}$. Tafel II.

Der Orthogonalschnitt des Zylinders, der zu den rektifizierenden Schraubenlinien (D_1) und (D_2) von (M_1) und (M_2) gehört, ist die sechsspitzige Hypozykloide. Während diese Schraubenlinien ferner den einschaligen Rotationshyperboloiden

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{9}{40}\sqrt{7}\right)^2} - \frac{\left(z - \frac{7}{24}\right)^2}{\left(\frac{7}{40}\sqrt{5}\right)^2} = 1 \text{ bzw. } \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{9}{40}\sqrt{7}\right)^2} - \frac{\left(z + \frac{25}{24}\right)^2}{\left(\frac{7}{40}\sqrt{5}\right)^2} = 1$$

angehören, liegen die Kurve konstanter Krümmung und ihre Zugeordnete auf den Rotationsellipsoiden

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{27}{40}\sqrt{3}\right)^2} + \frac{\left(z + \frac{17}{24}\right)^2}{\left(\frac{9}{40}\sqrt{15}\right)^2} = 1 \text{ bzw. } \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{27}{40}\sqrt{3}\right)^2} + \frac{\left(z + \frac{1}{24}\right)^2}{\left(\frac{9}{40}\sqrt{15}\right)^2} = 1 \ .$$

Die Striktionskurve der Hauptnormalenfläche ist der Schnitt dieses Zylinders über der sechsspitzigen Hypozykloide mit dem einschaligen Rotationshyperboloid

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{9}{40}\sqrt{7}\right)^2} - \frac{\left(z + \frac{3}{8}\right)^2}{\left(\frac{11}{120}\sqrt{5}\right)^2} = 1 \ .$$

Die Spitzen der rektifizierenden Schraubenlinien liegen verteilt auf den Parallelkreisen

$$z = \frac{35}{48} \quad \text{und} \quad z = -\frac{7}{48} \quad \text{bzw.} \quad z = -\frac{29}{48} \quad \text{und} \quad z = -\frac{71}{48}.$$

Den beiden mittelsten dieser Parallelkreise gehören zugleich die Spitzen der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten und die Spitzen der Striktionskurve der Hauptnormalenfläche an. Die höchsten Punkte von (M_1) liegen auf dem Parallelkreise $z = \frac{7}{48}$, die tiefsten Punkte von (M_2) auf $z = -\frac{43}{48}$.

Für die Biegungsregelfläche mit Richtebene erhält man folgende Daten: Die Biegungskurven $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$ der Kurve konstanter Krümmung und ihrer Zugeordneten gehören den Ellipsoiden an

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{18}{29}\right)^2} + \frac{\left(z - \frac{1}{12}\sqrt{7}\right)^2}{\left(\frac{3}{29}\sqrt{29}\right)^2} = 1 \text{ bzw. } \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{18}{29}\right)^2} + \frac{\left(z + \frac{1}{12}\sqrt{7}\right)^2}{\left(\frac{3}{29}\sqrt{29}\right)^2} = 1;$$

die Striktionskurve $(\bar{E})$ der Biegungsregelfläche liegt auf dem einschaligen Rotationshyperboloid

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{3}{29}\sqrt{7}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\frac{7}{12 \cdot 29}\sqrt{29}\right)^2} = 1.$$

Die höchsten und tiefsten Punkte der Kurven $(\bar{M}_1)$ und $(\bar{M}_2)$, sowie die Spitzen der Striktionslinie der Biegungsregelfläche, sind verteilt auf den Parallelkreisen

$$z = \frac{1}{12}\sqrt{7} \quad \text{und} \quad z = -\frac{1}{12}\sqrt{7}.$$

Es ist mir eine angenehme Pflicht, zum Schlusse meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. Gutzmer, sowie Herrn Professor Dr. E. Salkowski in Hannover für die freundliche Anregung zu vorliegender Arbeit und für die wertvollen Ratschläge bei ihrer Ausführung meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Rudolf Nelkenbrecher, Sohn des Musiklehrers R. Nelkenbrecher, am 15. April 1894 zu Zeitz. Ich bin evangelischen Bekenntnisses und preußischer Staatsangehöriger. Von Ostern 1900 ab besuchte ich die Mittelschule und dann die Oberrealschule meiner Geburtsstadt, die ich 1912 mit dem Zeugnis der Reife verließ, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren. Ich bezog zunächst die Universität Leipzig. Zu Anfang des Sommer-Semesters 1914 vertauschte ich diese mit der Universität Halle. Das Examen rigorosum bestand ich am 13. November 1915.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten:

in Leipzig

Brahn, Des Coudres, Hantzsch, Herglotz, Hölder, Koebe, Marx, Rohn, Rinne, Stieda, Volkelt, Wiener, Wundt,

in Halle

Dorn, Fries, Gutzmer, Menzer, Pfeiffer, Schmidt, Wangerin.

Ihnen allen fühle ich mich zu dauerndem Dank verpflichtet.

Druckfehler: Die Formel II. (2) auf S. 26 muß lauten:

$$\varrho_I = \frac{T_1^{\,2}}{\varrho} \quad .$$

Tafel I.

$$n = \frac{2}{5}$$

Maßstab 2 : 15.

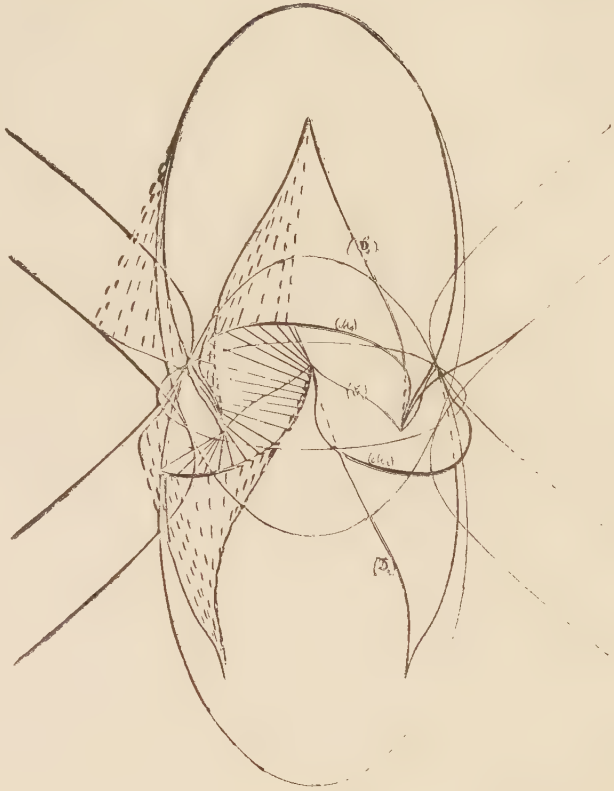


Fig. 1.

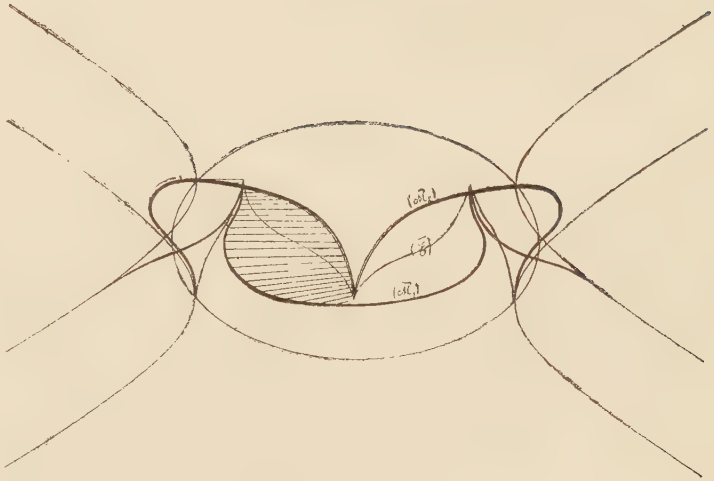


Fig. 2.

Tafel II.

$$n = \frac{3}{4}$$

Maßstab 2 : 10.

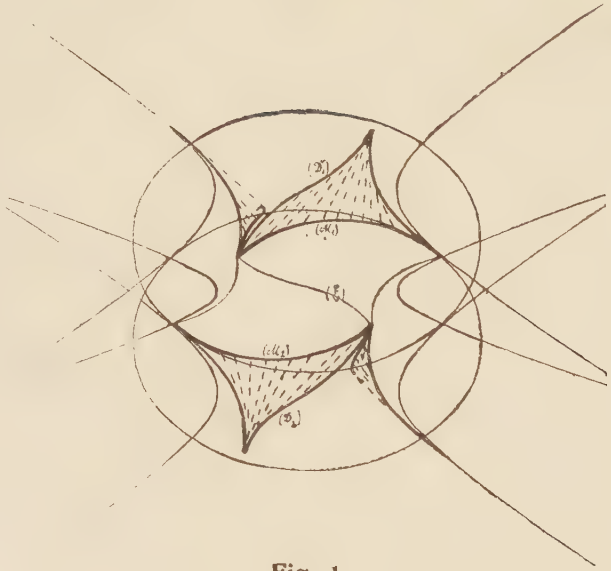


Fig. 1.

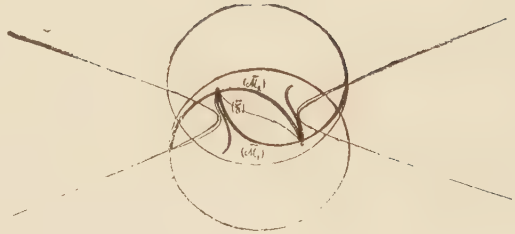


Fig. 2.

Tafel III.

Maßstab 1 : 1.

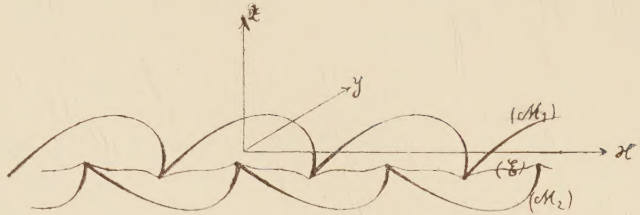


Fig. 1. $n = \frac{1}{2}$

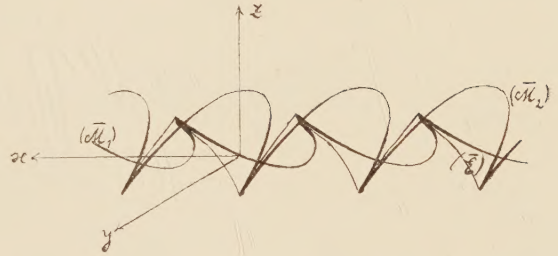


Fig. 2. $n^2 = \frac{1}{5}$

Tafel IV.

Fig. 1. $y = \cos \frac{\sqrt{1-n^2(1+x^2)}}{n}$, $n = \frac{1}{10}$.

Fig. 2. $\varrho_0 = \cos \frac{\sqrt{1-n^2(1+s_0{}^2)}}{n}$, $n = \frac{1}{10}$.

Fig. 3. $\varrho = k \cdot \cos ms$